Devoir n°9 - Nombres complexes - TS

14 février 2020 - 1 h

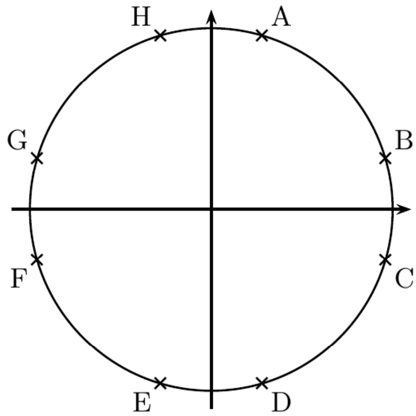
Exercice 1 (6,5 pts) : On considère l'équation (E) :

$$25z^2 - 14z + 25 = 0$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.
2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.
3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{24}{25}$$

   Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.
4. La figure ci-contre fait apparaitre huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Exercice 2 (7 pts) : Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. **Affirmation A** : $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2\,019} = 1$
2. Soit z le nombre complexe $\frac{1}{6}(2 + 5\mathrm{i})$. **Affirmation B** : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z|^n = 0$
3. On rappelle que, pour tout nombre réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
   Affirmation C : Pour tout nombre réel a de $[-\pi\ ;\ 0]$ tel que $\cos(2a) = \frac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\frac{3}{5}$

Exercice 3 (6,5 pts) : Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z - 2}$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la partie réelle $Re(z)$ et la partie imaginaire $Im(z)$ de Z en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que Z soit un réel.
   (on rappelle que le cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$)
4. **Bonus :** Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$.