Devoir n°9 - Calculs avec les nombres complexes - TS

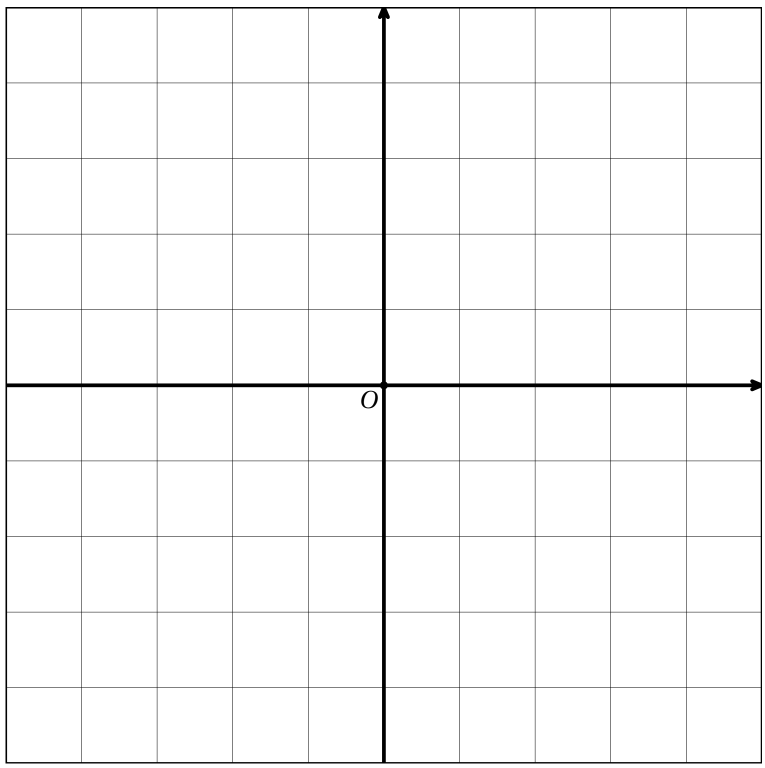
28 janvier 2017 - 2h

Exercice 1 (6 pts) : On désigne par (E) l'équation d'inconnue complexe z,

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ et écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On sait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$. Démontrer que :
   - Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
   - Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
4. Montrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Exercice 2 (4 pts) :



Représenter les ensembles suivants après avoir brièvement justifié :

$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \ / \ |z - 1 + \mathrm{i}| = 3\}$

$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \ / \ |z + 4 + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|\}$

$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z) \ / \ \arg(z - 1 + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3} \ \ (2\pi)\right\}$

$\mathscr{E}_4 = \left\{M(z) \ / \ \arg\left(\dfrac{z+3}{z+2-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ \ (\pi)\right\}$

Exercice 3 (4 pts) : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_\mathrm{A} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}} \text{ et } z_\mathrm{C} = -3.$$

Partie A :

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B : Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.
2. Démontrer que les points O, A et B' sont alignés, ainsi celui les points O, B et A'.

Exercice 4 (6 pts) : On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a) Calculer z_1,z_2 et z_3.
   b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique ci-dessous.
   c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle et rectangle en A_1.
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$: est-elle convergente ?
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.

   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1,A_2,A_3, etc.
   Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).