Devoir de mathématiques n^o 2 - TES4

9 oct 2007 - 1H

Remarque : Les parties B et C sont indépendantes de la partie A. La partie D n'est pas à faire pendant le contrôle.

Etude complète d'une fonction rationnelle - Lien avec coût de production

Partie A :
On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
C_g admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 20.
C_g coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;-100)$.
C_g admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -900x$ au point d'abscisse 10.
Déterminer les coefficients a, b et c.

Partie B :
Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et étudier le sens de variation de la fonction g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20;40]$.
   Donner, en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.
3. En dduire le signe de $g(x)$.

Partie C :
Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2}$$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en 0, et interpréter graphiquement ce dernier résultat.
2. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
3. Dresser le tableau de variation de f, et calculer la valeur arrondie aux dixièmes du minimum de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 10.
5. Placer les éléments caractéristiques trouvés en 3. et 4. dans le repère au dos de la feuille,
   contenant le tracé de C_f.

Partie D à rendre pour lundi 14/10/2008 :
Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit exprimé en centaines d'unités, est défini sur $]0;100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

$C(x)$ étant exprimé en milliers d'euros.
Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc donné par : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

En utilisant les résultats de la partie B :

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 130000 euros.
   Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets
   que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.