

Test n°3 - Nombres Complexes - Equations - T maths exp

23 octobre 2024 - 30 min

Exercice 1 (2,5 pts) : Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$, $\frac{5}{z^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (4,5 pts) : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

1. Montrer que 3 est racine de P .
2. Factoriser $P(z)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 3 (3 pts) : On considère l'équation du second degré à coefficients complexes :

$$(E) : z^2 - (6 + 2i)z + 7 + 6i = 0$$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z ,

$$z^2 - (6 + 2i)z = (z - (3 + i))^2 - 8 - 6i$$

2. En déduire que l'équation (E) équivaut à

$$(z - (3 + i))^2 = 1$$

3. Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Correction du test n°3 - T maths exp

Ex 1: $\frac{5}{z^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

(12,5)

$$\Leftrightarrow \frac{5}{z^2} = \frac{6-z}{2z}$$

$$\Leftrightarrow 10z = z^2(6-z)$$

$$\Leftrightarrow 10z = 6z^2 - z^3$$

$$\Leftrightarrow 6z^2 - z^3 - 10z = 0$$

$$\Leftrightarrow z(-z^2 + 6z - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z^2 - 6z + 10 = 0$$

impossible

$$\Leftrightarrow z^2 - 6z + 10 = 0$$

$$\Delta = 36 - 40 = -4 = 4i^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{6+2i}{2} = 3+i \\ \bar{z}_1 = z_2 = 3-i \end{array} \right.$$

$$\bar{z}_1 = z_2 = 3-i$$

$$S = \{3-i; 3+i\}$$

Ex 2: $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ sur $\mathbb{C}$

(14,5)

1) $P(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 12 = 27 - 3 \times 9 + 12 - 12 = 0$

Donc 3 est racine de P

2) Alors $P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c)$
 $= (z-3)(z^2 + bz + 4)$

on lit directement
 $a=1$ et $c=4$

$$\begin{aligned} (z-3)(z^2 + bz + 4) &= z^3 + bz^2 + 4z - 3z^2 - 3bz - 12 \\ &= z^3 + (b-3)z^2 + (4-3b)z - 12 \\ &= P(z) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-3 = -3 \\ 4-3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 4-0=4 \text{ vrai} \end{cases}$$

Alors $P(z) = (z-3)(z^2 + 4)$

3) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2 + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z^2 = -4$$

$$S = \{3; -2i; 2i\}$$

Ex 3: (E): $z^2 - (6+2i)z + 7+6i = 0$

dans $\mathbb{C}$

1) $(z - (3+i))^2 - 8-6i = z^2 - 2(3+i)z + (3+i)^2 - 8-6i$
 $= z^2 - (6+2i)z + 9+6i-1-8-6i$
 $= z^2 - (6+2i)z$

(13)

2) (E) $\Leftrightarrow [(z - (3+i))^2 - 8-6i] + 7+6i = 0$

$$\Leftrightarrow (z - (3+i))^2 - 1 = 0$$

3) (E) $\Leftrightarrow (z - (3+i))^2 = 1 \Leftrightarrow z - (3+i) = 1 \text{ ou } z - (3+i) = -1$
 $\Leftrightarrow z = 4+i \text{ ou } z = 2+i$

$$S = \{2+i; 4+i\}$$

1,5