

Test n°2 - Calculs avec les Nombres Complexes - T maths exp

3 octobre 2024 - 30 min

Exercice 1 (4 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Déterminer la forme algébrique des images par f de $2i$ puis de $2+i$.
2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents par f de $(1+i)$.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 2 (5 pts) : Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1. $i\bar{z} + z = 0$

2. $3z^2 + 6z + 4 = 0$

3. $\frac{z}{4} = 1 - \frac{1}{z}$

Ex 1: $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

1) $f(2i) = \frac{2i-1}{2i+1} = \frac{2i-1}{2i+1} \times \frac{2i-1}{2i-1} = \frac{4i^2-4i+1}{4i^2-1} = \frac{-3-4i}{-5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
 $f(2+i) = \frac{(2+i)-1}{(2+i)+1} = \frac{1+i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{3+2i-i^2}{9-i^2} = \frac{4+2i}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

2) $f(z) = 1+i$
 $\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = 1+i$
 $\Leftrightarrow z-1 = (1+i)(z+1)$
 $\Leftrightarrow z-1 = (1+i)z + (1+i)$
 $\Leftrightarrow -iz = 2+i$
 $\Leftrightarrow z = \frac{2+i}{-i}$
 $\Leftrightarrow z = \left(\frac{2+i}{-i}\right) \times \frac{i}{i}$
 $\Leftrightarrow z = 2i-1$
 $\Leftrightarrow z = -1+2i$

3) $f(z) = z$
 $\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z$
 $\Leftrightarrow z-1 = z(z+1)$
 $\Leftrightarrow z-1 = z^2+z$
 $\Leftrightarrow z^2 = -1$
 $\Leftrightarrow z = \pm i$
 $S = \{-i; i\}$

Ex 2: 1) $iz + z = 0$ on pose $z = a+ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow i(a+ib) + (a+ib) = 0$
 $\Leftrightarrow ia + b + a + ib = 0$
 $\Leftrightarrow (a+b) + i(a+b) = 0$
 $\Leftrightarrow a+b = 0$
 $\Leftrightarrow b = -a$

$S = \{(a-ia) / a \in \mathbb{R}\}$

2) $3z^2 + 6z + 4 = 0$
 $\Delta = 36 - 48 = -12$
 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 $\begin{cases} z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-6-2i\sqrt{3}}{6} = -1-i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ z_2 = -1+i\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$
 $S = \{z_1; z_2\}$

3) $\frac{z}{4} = 1 - \frac{1}{z}$ avec $z \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{z}{4} = \frac{z-1}{z}$

$\Leftrightarrow (z-2)^2 = 0$

$S = \{2\}$

$\Leftrightarrow z^2 = 4(z-1)$

$\Leftrightarrow z^2 = 4z - 4$

$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 4 = 0$