

## Devoir n°9 - Matrices et Graphes - T maths exp

15 mai 2025 - 1h

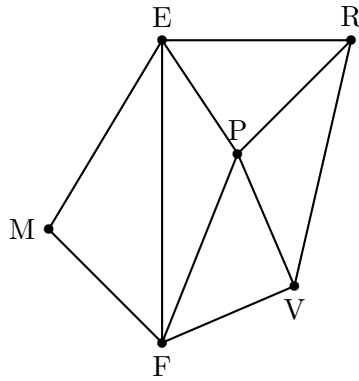
**Exercice 1 (4 pts)** : On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $A^2 = 2I_3 - A$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible ; donner alors  $A^{-1}$ .

**Exercice 2 (7 pts)** : On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier que  $P$  est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer le produit  $D = P^{-1} \times A \times P$ .
3. a) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , conjecturer une expression de  $D^n$ .  
b) Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. Exprimer alors  $A^n$  en fonction de  $n$ , et des matrices  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

**Exercice 3 (9 pts) :** Un restaurateur se fournit auprès de 5 producteurs locaux. Le graphe ci-dessous représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs :



Légende :  
 E : éleveur  
 F : fromager  
 M : maraîcher  
 P : pisciculteur  
 R : **restaurateur**  
 V : vigneron

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?
2. Citer deux sommets adjacents et deux sommets non adjacents.
3. Le graphe est-il complet ? Le graphe est-il connexe ?
4. Est-il possible pour le restaurateur d'organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route ?  
Si oui, préciser le point d'arrivée et proposer un tel parcours.

5. On appelle  $N$  la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.  
a) Déterminer la matrice  $N$ .

b) On donne la matrice  $N^3 =$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 10 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 6 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant la réponse, le nombre de chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron.

6. Les arêtes du graphe sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètre, entre les différents lieux.

Le restaurateur doit se rendre chez le maraîcher en partant de chez lui. Quel est le plus court chemin pour effectuer ce trajet ?  
Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.

