

Ex 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) $\det P = 1 \times 3 - 2 \times (-1) = 5 \neq 0$
 donc P est inversible

$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

2) $A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$

3) $P^{-1} \times A \times P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) @ pour $n \in \mathbb{N}^\infty$, on conjecture que $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

(b) initialisation: pour $n=1$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ c'est vérifié

hérédité: soit $k \in \mathbb{N}^\infty$, on suppose que
 $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$ $D^{k+1} = D^k \times D = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
 vrai au rang $k+1$ $= \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 4^{k+1} \end{pmatrix}$

Conclusion: par principe de récurrence
 on a $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

4) $D = P^{-1} \times A \times P \Leftrightarrow P \times D \times P^{-1} = A$

$A^n = \underbrace{(P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) \times \dots \times (P \times D \times P^{-1})}_{n \text{ fois}}$

$\Leftrightarrow A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ (par récurrence !)

Ex 3: 1) Il y a 6 sommets donc le graphe est d'ordre 6 ^

2) $\begin{cases} E \text{ et } R \text{ sont deux sommets adjacents} \\ M \text{ et } R \text{ ne sont pas adjacents} \end{cases}$ N

3) Le graphe n'est pas complet puisque tous les sommets ne sont pas adjacents. 1,5
 Il est connexe puisque tous les sommets peuvent être reliés par une chaîne.
 ex: $E-R-P-V-F-M$

4) $\begin{cases} R \text{ est degré } 3 \\ V \text{ est degré } 3 \end{cases}$ Seulement 2 sommets sont de degré impair

D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne donc il est possible de visiter tous les producteurs en empruntant chaque route une et une seule fois. 2,

$R-E-M-F-E-P-R-V-P-F-V$

5) @ $N = \begin{matrix} & E & F & M & P & R & V \\ \begin{matrix} E \\ F \\ M \\ P \\ R \\ V \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

matrice symétrique

⑥ N^3 donne le nombre de chemins de longueur 3.

on lit $N_{4,6}^3 = 5$

il y a 5 chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron

N

N

6) D' après l'algorithme de Dijkstra

	R	E	F	P	V	M
R	0	5R	∞	4R	10R	∞
P4	X	5R 5P	11P	X	9P	∞
E5	X	X	11E	X	9P	13E
V9	X	X	10V	X	X	13E
F10	X	X	X	X	X	12F

$$R \xrightarrow{4} P \xrightarrow{5} V \xrightarrow{1} F \xrightarrow{2} M$$

Le plus court chemin est de 12 km

Ex 1 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(5)

donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 = 2I_3 - A$

2) $A^2 = 2I_3 - A \Leftrightarrow A^2 + A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A + I_3) = 2I_3$
 $\Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$

(2)

soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$