Devoir n°8 - Nombres Premiers - T maths exp

3 avril 2025 - 1h

Exercice 1 (6 pts) : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = n^5 - n$.

1. Montrer que A est divisible par 5.
2. Vérifier que $A = n(n^2-1)(n^2+1)$ puis montrer que A est divisible par 3.
3. Montrer que A est divisible par 30.

Exercice 2 (3 pts) : Déterminer le plus petit entier possédant 28 diviseurs.

Exercice 3 (5 pts) : Le but de l'exercice est de trouver tous les entiers relatifs x solutions de

$$(E) \ : \ x^2 + x - 2 \ \equiv \ 0 \ (13)$$

1. Trouver une solution particulière α de (E).
2. On pose $X = x - \alpha$. Trouver alors toutes les solutions de (E).

Exercice 4 (6 pts) : Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, en justifiant, puis énoncer sa réciproque en indiquant la véracité de celle-ci.

Proposition 1 : Si n divise a^2, alors n divise a.

Proposition 2 : Si n est premier, alors n est impair.

Proposition 3 : Si p et q sont deux nombres premiers distincts, alors p et q sont premiers entre eux.

Ex1 : $A = n^5 - n$ $(n \in \mathbb{N})$

1) 5 est un nombre premier
donc, d'après le petit théorème de Fermat $n^5 \equiv n\ (5)$
c'est-à-dire $n^5 - n \equiv 0\ (5)$ donc A est divisible par 5

2) $A = n(n^4-1) = n(n^2+1)(n^2-1)$

$n \equiv \dots\ (3)$	0	1	2
$n^2-1 \equiv \dots\ (3)$	2	0	1
$n^2+1 \equiv \dots\ (3)$	1	2	0

Par produit, on obtient toujours $A \equiv 0\ (3)$
donc A est divisible par 3

3) n et n^5 ont la même parité
donc $A = n^5 - n$ sera toujours pair

A est donc divisible par 2, 3 et 5
qui sont tous entre eux 2 à 2
d'après le corollaire du théorème de Gauss
A est divisible par $2 \times 3 \times 5$ c'est-à-dire 30

Ex2: soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n, son nombre de diviseurs est $(\alpha_1+1) \times (\alpha_2+1) \times \dots \times (\alpha_k+1)$

on a $28 = 2 \times 2 \times 7 = (1+1) \times (1+1) \times (6+1)$
alors $2^6 \times 3 \times 5 = 960$ a bien 28 diviseurs
et c'est le plus petit entier possible

Ex3: $(\in) : x^2 + x - 2 \equiv 0 \ (13)$ $\quad (x \in \mathbb{Z})$

1) pour $x = 1$, on a $1^2 + 1 - 2 = 0$ donc 1 est solution
2) $X = x - 1 \iff x = X + 1$ et $x^2 = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

$$x^2 + x - 2 \equiv 0 \ (13) \iff (X^2 + 2X + 1) + (X+1) - 2 \equiv 0 \ (13)$$
$$\iff X^2 + 3X \equiv 0 \ (13) \iff X(X+3) \equiv 0 \ (13)$$

$13 \mid X(X+3)$ et 13 est un nombre premier
d'après le théorème de gauss $13 \mid X$ ou $13 \mid (X+3)$
$X = 13k$ ou $X + 3 = 13k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$

$$S = \{ 13k + 1 \ ; \ 13k' - 2 \ / \ k, k' \in \mathbb{Z} \}$$

Ex4: (P_1) soit $n = 4$ et $a = 2$
on a $4 \mid 2^2$ mais $4 \nmid 2$ c'est faux
Réciproque, si $n \mid a$ alors $n \mid a^2$ vrai
si $n \mid a$, $a = kn$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $a^2 = k^2 n^2 = \underbrace{k^2 n}_{\in \mathbb{Z}} \times n$

(P_2) $n = 2$ pair et premier, c'est faux
Réciproque si n est impair alors n est premier
c'est faux ex: 9 impair non premier

(P_3) si p et q premiers distincts, leur seul diviseur commun est 1 donc ils sont premiers entre eux
c'est vrai

réciproque si p et q sont premiers entre eux
alors p et q sont premiers distincts. C'est faux c.ex: 4 et 7