

Devoir n°7 - Arithmétique - T maths exp

6 mars 2025 - 1h30

Exercice 1 (10 pts) : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 6 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 6$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = 9 \times 2^n - 6$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.
3. On définit la suite d'entiers (w_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $w_n = \frac{u_n}{6}$.
 - a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $w_{n+1} - 2w_n = 1$.
 - b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, w_n et w_{n+1} sont premiers entre eux.
 - c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
4.
 - a) Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
 - b) En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
 - c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Exercice 2 (10 pts) : On appelle S l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n &\equiv 13 \pmod{19} \\ n &\equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

1. **Recherche d'un élément de S** : on désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que

$$19u + 12v = 1$$

- a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$.
 - b) On pose $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$; montrer que $n_0 \in S$.
 - c) Donner un entier n_0 appartenant à S .
2. **Caractérisation des éléments de S** .
 - a) Soit n un entier relatif appartenant à S ; montrer que

$$n - n_0 \equiv 0 \pmod{228}$$

- b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si n peut s'écrire sous la forme

$$n = -6 + 228k$$

où k est en entier relatif.

3. **Application** : La comète A passe tous les 19 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 13 ans.
La comète B passe tous les 12 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 6 ans.
Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année?