

Devoir n°7 - Arithmétique - T maths exp

6 mars 2025 - 1h30

Exercice 1 (10 pts) : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 6 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 6$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = 9 \times 2^n - 6$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.
3. On définit la suite d'entiers (w_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $w_n = \frac{u_n}{6}$.
 - a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $w_{n+1} - 2w_n = 1$.
 - b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, w_n et w_{n+1} sont premiers entre eux.
 - c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
4. a) Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
 - b) En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
 - c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Exercice 2 (10 pts) : On appelle S l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n &\equiv 13 \pmod{19} \\ n &\equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

1. **Recherche d'un élément de S** : on désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que

$$19u + 12v = 1$$

- a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$.
 - b) On pose $n_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$; montrer que $n_0 \in S$.
 - c) Donner un entier n_0 appartenant à S .

2. **Caractérisation des éléments de S** .

- a) Soit n un entier relatif appartenant à S ; montrer que

$$n - n_0 \equiv 0 \pmod{228}$$

- b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si n peut s'écrire sous la forme

$$n = -6 + 228k$$

où k est en entier relatif.

3. **Application** : La comète A passe tous les 19 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 13 ans.
La comète B passe tous les 12 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 6 ans.
Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année ?

Ex 1 : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1) $v_n = u_n + 6 \quad (n \in \mathbb{N})$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 6$
 $= 2u_n + 6 + 6$
 $= 2u_n + 12$
 $= 2(u_n + 6)$
 $= 2v_n$

$v_0 = u_0 + 6 = 9$
 (v_n) est une suite
 géométrique de raison 2
 de terme initial $v_0 = 9$

b) alors $v_n = v_0 \times 2^n = 9 \times 2^n$
 et $u_n = v_n - 6 = 9 \times 2^n - 6 \quad (n \in \mathbb{N})$

2) pour $n \geq 1$ $u_n = 9 \times 2^n - 6 = 3 \times 3 \times 2 \times 2^{n-1} - 6$
 $= 6 \times (3 \times 2^{n-1} - 1) = 6q$

u_n est divisible par 6 $\underbrace{\quad}_{\in \mathbb{N}}$

3) $w_n = \frac{u_n}{6}$ pour $n \geq 1$

a) $w_{n+1} - 2w_n = \frac{u_{n+1}}{6} - \frac{2u_n}{6} = \frac{2u_n + 6}{6} - \frac{2u_n}{6}$
 $= \frac{6}{6} = 1$

on a donc $w_{n+1} - 2w_n = 1$ pour $n \geq 1$

b) $1 \times w_{n+1} + (-2) \times w_n = 1$

d'après le théorème de Bézout
 w_{n+1} et w_n sont premiers entre eux

c) $u_n = 6v_n$ $n \geq 1$

$\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = \text{PGCD}(6v_{n+1}; 6v_n)$

$= 6 \text{PGCD}(v_{n+1}; v_n)$

$= 6 \times 1$

$= 6$

par homogénéité

4) @ $2^4 = 16$ et $16 = 5 \times 3 + 1$
 donc $2^4 \equiv 1(5)$ 95

⑤ $u_n = 9 \times 2^n - 6 \quad (n \geq 1) \quad (k \in \mathbb{N})$
 Si $n = 4k + 2$
 alors $u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 36 \times (2^4)^k - 6$

$2^4 \equiv 1(5)$
 par compatibilité avec les puissances

$(2^4)^k \equiv 1(5)$
 par produit $36 \times (2^4)^k \equiv 36(5)$ 2
 et somme $36 \times (2^4)^k - 6 \equiv 35(5) \equiv 0(5)$
 donc u_n est divisible par 5

⑥ $u_0 = 3$ non divisible par 5 ! 95

Exercice 2:

$$(S): \begin{cases} m \equiv 13(19) \\ m \equiv 6(12) \end{cases}$$

1) a) $19 = 12 \times 1 + 7$
 $12 = 7 \times 1 + 5$
 $7 = 5 \times 1 + 2$
 $5 = 2 \times 2 + 1$
 $2 = 2 \times 1$

d'après l'algorithme d'Euclide $\text{pgcd}(19; 12) = 1$
19 et 12 premiers entre eux
d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$
tels que $19u + 12v = 1$

b) $m_0 = 6 \times 19u + 13 \times 12v$
or $19u = 1 - 12v$ donc $m_0 = 6(1 - 12v) + 13 \times 12v$
 $= 6 + 7 \times 12v$

et $12v = 1 - 19u$ donc $m_0 = 6 \times 19u + 13(1 - 19u)$
 $= 13 - 7 \times 19u$

$12v \equiv 0(12)$ par produit
et somme

$19u \equiv 0(19)$

donc $m_0 \in S$.

$$\left. \begin{array}{l} m_0 \equiv 6(12) \\ m_0 \equiv 13(19) \end{array} \right\}$$

c) $1 = 5 - 2 \times 2$
 $= 5 - (7 - 5) \times 2$
 $= 3 \times 5 - 2 \times 7$
 $= 3 \times (12 - 7) - 2 \times 7$
 $= 3 \times 12 - 5 \times 7$
 $= 3 \times 12 - 5(19 - 12)$
 $= -5 \times 19 + 8 \times 12$

$(-5; 8)$ est solution
de $19u + 12v = 1$
donc $m_0 = 6 \times 19 \times (-5) + 13 \times 12 \times 8$
 $= 678$

$m_0 \in S$

$$2) \textcircled{a} \left\{ \begin{array}{l} m \in S \\ m_0 \in S \end{array} \right. \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} m \equiv 13(19) \text{ et } m_0 \equiv 13(19) \\ m \equiv 6(12) \text{ et } m_0 \equiv 6(12) \end{array} \right.$$

par différence $m - m_0 \equiv 0(19)$
 et $m - m_0 \equiv 0(12)$

$19 \mid (m - m_0)$ et 19 et 12 sont premiers entre eux.

Donc après le lemme de Gauss
 19×12 soit 228 divise $(m - m_0)$
 c'est à dire $m - m_0 \equiv 0(228)$

15

b) $m_0 = 678 = 228 \times 2 + 222 = 228 \times 3 - 6$
 $m_0 \equiv -6(228)$

$m \in S \Rightarrow m - m_0 \equiv 0(228) \Rightarrow m \equiv m_0(228)$
 $\Rightarrow m \equiv -6(228) \Rightarrow \underline{m = -6 + 228k}$
 $(k \in \mathbb{Z})$

Réciproquement: soit $m = -6 + 228k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
 $228k \equiv 0(19)$ $-6 = 13 - 19$ donc $-6 \equiv 13(19)$
 $228k \equiv 0(12)$ $-6 = 6 - 12$ donc $-6 \equiv 6(12)$

Par somme $m \equiv 13(19)$ et $m \equiv 6(12)$
 donc $m \in S$

15

3) Application :

Soient p le nombre de périodes de la comète A et q le nombre de périodes de la comète B.

Soit t le nombre d'années cherché

$$\begin{cases} t = 19p + 13 \\ t = 12q + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \equiv 13(19) \\ t \equiv 6(12) \end{cases}$$

d'après 2)(b) $t = -6 + 228k$ $k \in \mathbb{Z}$

Le temps minimum est

donné par $k=1$ $t = -6 + 228 = 222$

Dans 222 années