

13 fev 2025 - 30 min

10

Exercice 1 (8 pts) : On considère l'équation (E) : $23x - 17y = 6$ où x et y sont des entiers relatifs.

- Vérifier que le couple $(1; 1)$ est solution de l'équation (E).
- Résoudre l'équation (E).
- Application** : Déterminer tous les entiers naturels N inférieurs à 1000 tels que, dans la division euclidienne de N par 23, le reste soit 2, et dans celle de N par 17, le reste soit 8.

Exercice 2 (3 pts) : Soit le système (S) :

$$\begin{cases} n \equiv 1(5) \\ n \equiv 3(4) \end{cases}$$

- Montrer que si n est solution de (S) alors $(n - 11)$ est divisible par 4 et par 5.
- En déduire l'ensemble des solutions du système.

Ex 1: (E) : $23x - 17y = 6$ $x, y \in \mathbb{Z}$

1) $23 \times 1 - 17 \times 1 = 6$ donc $(1; 1)$ est solution de (E) 0.5

2) Soit $(x; y)$ solution de (E)

alors $23x - 17y = 6$

et $23 \times 1 - 17 \times 1 = 6$

$23(x-1) - 17(y-1) = 0$ Par différence

$\Leftrightarrow 23(x-1) = 17(y-1)$ (*)

alors $23 \mid 17(y-1)$

or 23 et 17 premiers entre eux

d'après le théorème de Gauss

$23 \mid y-1$

donc $y-1 = 23k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

en remplaçant dans (*), on obtient $x-1 = 17k$

donc $x = 17k+1$ et $y = 23k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Réciproquement, soient $x = 17k+1$ et $y = 23k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$23 \times (17k+1) - 17 \times (23k+1)$
 $= 23 \times 17k + 23 - 17 \times 23k - 17$
 $= 6$

donc $(x; y)$ est solution de (E) 1.5

donc $S = \{ (17k+1; 23k+1) / k \in \mathbb{Z} \}$ 0.5

d'après l'algorithme d'Euclide
 $23 = 17 \times 1 + 6$
 $17 = 6 \times 2 + 5$
 $6 = 5 \times 1 + 1$
 23 et 17 sont premiers entre eux
 $\text{PGCD}(23; 17) = 1$

3) on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq 1000$

$$\text{avec } \begin{cases} N = 23q + 2 \\ N = 17q' + 8 \end{cases} \quad q, q' \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } 23q + 2 = 17q' + 8$$

$$\Leftrightarrow 23q - 17q' = 6$$

$(q; q')$ solution de (*)

1) après la question 2

$$\begin{cases} q = 17k + 1 \\ q' = 23k + 1 \end{cases}$$

$$\text{on a donc } N = 23(17k + 1) + 2 = 23 \times 17k + 25 \\ (= 17(23k + 1) + 8)$$

$$0 \leq 23 \times 17k + 25 \leq 1000$$

$$\text{pour } k=0 \quad N=25$$

$$\text{pour } k=1 \quad N=416$$

$$\text{pour } k=2 \quad N=807$$

$$S = \{25; 416; 807\} \quad \underline{2}$$

Ex 2: $(S): \begin{cases} m \equiv 1(5) \\ m \equiv 3(4) \end{cases}$

1) m solution de (S) $\Leftrightarrow m = 5k + 1$ et $m = 4k' + 3 \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$
 $\Leftrightarrow m - 1 = 5k$ et $m - 1 = 4k' + 2$
 $\Leftrightarrow \underline{m - 1 = 5(k-2)}$ et $\underline{m - 1 = 4(k'-2)}$
 $\quad \quad \quad \in \mathbb{Z} \quad \quad \quad \in \mathbb{Z}$

Donc m solution de (S) $\Rightarrow$ $m - 1$ est divisible par 4 et 5

2) 4 et 5 sont premiers entre eux ($5 = 4 \times 1 + 1$)
d'après le corollaire du théorème de Gauss
 $(m - 1)$ est divisible par 4×5 soit 20
donc : $m = 20t + 1$ ($t \in \mathbb{Z}$)

Réciproquement: si $m = 20t + 1$

$$\text{alors } m = 5(4t + 2) + 1 \text{ et } m = 4(5t + 2) + 3$$

donc $m \equiv 1(5)$ et $m \equiv 3(4)$ m est solution de (S)

$$\text{Donc } S = \{ \underline{20t + 1} / t \in \mathbb{Z} \}$$