

Devoir n°5 - PGCD - Théorème de Bézout - T maths exp

6 fev 2025 - 30 min

**Exercice 1 (2 pts) :** Montrer que, pour tout entier relatif  $k$ ,  $(7k + 3)$  et  $(2k + 1)$  sont premiers entre eux.

**Exercice 2 (4 pts) :** Déterminer les couples d'entiers naturels  $(a; b)$  de somme 72 et de PGCD égal à 9.

**Exercice 3 (4 pts) :**

1. On considère l'équation  $(E) : 87x + 31y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, vérifier que 87 et 31 sont premiers entre eux.

b) En déduire un couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  tel que  $87u + 31v = 1$ .

c) En déduire une solution particulière de l'équation  $(E)$ .

d) **Bonus :** Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .

2. **Application Bonus :** Trouver les points de la droite  $\Delta$  d'équation  $87x + 31y - 2 = 0$  dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Ex1 :  $\begin{cases} a = 7k + 3 \\ b = 2k + 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2a - 7b &= 2(7k + 3) - 7(2k + 1) = -1 \\ \text{donc } -2a + 7b &= 1 \end{aligned}$   
 $k \in \mathbb{Z} \quad \text{il existe } u \text{ et } v \in \mathbb{Z} / au + bv = 1$   
 $u = -2 \text{ et } v = 7$

), après le théorème de Bézout,  
 $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

Ex2 :  $\begin{cases} a + b = 72 \\ \text{pgcd}(a; b) = 9 \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{aligned} &9 \mid a \text{ et } 9 \mid b \\ &\text{donc il existe } k, k' \in \mathbb{N} \\ &\text{tels que } a = 9k \text{ et } b = 9k' \end{aligned}$   
 $\text{pgcd}(a; b) = 9 \Leftrightarrow \text{pgcd}(9k; 9k') = 9 \Leftrightarrow 9 \text{ pgcd}(k; k') = 9$   
 $\Leftrightarrow \text{pgcd}(k; k') = 1$   $k$  et  $k'$  sont premiers entre eux Homogénéité  
 or  $a + b = 72 \Leftrightarrow 9(k + k') = 72 \Leftrightarrow k + k' = 8$   
 $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$  donc  $k = 1 ; k' = 7$   
 $k = 3 ; k' = 5$   
 ne conviennent pas et inversement

$S = \{(9; 63); (27; 45); (45; 27); (63; 9)\}$

Ex 3: 1) (E):  $87x + 31y = 2 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$

a)  $87 = 31 \times 2 + 25$   $\text{Pgcd}(87; 31) = \text{Pgcd}(31; 25)$   
 $31 = 25 \times 1 + 6$   $= \text{Pgcd}(25; 6)$   
 $25 = 6 \times 4 + 1$   $= \text{Pgcd}(6; 1)$   
 $6 = 6 \times 1$   $= 1$

Donc 87 et 31 sont premiers entre eux

b) d'après le théorème de Bézout  
il existe  $u, v \in \mathbb{Z} / 87u + 31v = 1$

$1 = 25 - 6 \times 4$   
 $= 25 - (31 - 25) \times 4$  on a  $5 \times 87 - 14 \times 31 = 1$   
 $= 25 \times 5 - 31 \times 4$   $u = 5$  et  $v = -14$   
 $= (87 - 31 \times 2) \times 5 - 31 \times 4$   
 $= 87 \times 5 - 14 \times 31$

c)  $(5; -14)$  est solution de  $87x + 31y = 1$   
donc  $(10; -28)$  est solution de (E)

d) Soit  $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$  solution de (E)

$$87x + 31y = 2$$

on  $87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2$

donc  $87(x - 10) + 31(y + 28) = 0$   
c'est à dire  $\underbrace{87(x - 10)}_{\in \mathbb{Z}} = -31(y + 28)$

donc  $87 \mid -31(y + 28)$  or 87 et 31 premiers entre eux  
(87 et (-31) aussi)

d'après le théorème de Gauss  $87 \mid (y + 28)$

Donc  $y + 28 = 87k$  soit  $y = 87k - 28$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

on a donc  $87(x - 10) = -31 \times 87k$   
soit  $x - 10 = -31k$  et  $x = 10 - 31k$

Réciproquement: soit  $x = 10 - 31k$  et  $y = 87k - 28$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

alors  $87(10 - 31k) + 31(87k - 28)$  donc  $(x; y)$  est  
 $= 870 - 87 \times 31k + 31 \times 87k - 868 = 2$  solution de (E)