

Devoir n°4 - Congruences - T maths exp

23 janvier 2025 - 30 min

Exercice 1 (5 pts) :

- Déterminer, suivant les valeurs de n , les restes de la division euclidienne 4^n par 7.
- En déduire le reste de la division euclidienne 928^{929} par 7.

Exercice 2 (3 pts) :

- Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 5.

$x \equiv \dots (5)$					
$x^2 \equiv \dots (5)$					

- Prouver que l'équation $4x^2 - 5y^2 = 3$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 3 (2 pts) : Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$a \equiv a'(n) \text{ et } b \equiv b'(n) \Rightarrow a + b \equiv a' + b'(n)$$

Exercice 4 (Bonus) : Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est un multiple de 3.

Ex4 : soient $(k-1); k; (k+1)$ trois entiers consécutifs $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 & (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 \\
 &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\
 &= 3k^3 + 6k \\
 &= 3(k^3 + 2k) \quad \text{multiple de } 3 \\
 & \quad \quad \quad \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Ex 1: 1) $4^0 = 1 = 7 \times 0 + 1$
 $4^1 = 4 = 7 \times 0 + 4$
 $4^2 = 16 = 7 \times 2 + 2$
 $4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$

$4^p \equiv 1(7)$
 $4^1 \equiv 4(7)$
 $4^2 \equiv 2(7)$

Les Restes
peuvent être 1, 2
ou 4

Par puissance et produit, on a ($p \in \mathbb{N}$)

$4^{3p} \equiv 1(7)$; $4^{3p+1} \equiv 4(7)$ et $4^{3p+2} \equiv 2(7)$ 3

2) $928 = 7 \times 132 + 4$ donc $928 \equiv 4(7)$

alors $928^{929} \equiv 4^{929}(7)$ (5)

or, $929 = 309 \times 3 + 2 = 3p + 2$

donc $928^{929} \equiv 2(7)$ 2. Reste est 2 2

Ex 2: 1)

$x \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots (5)$	0	1	4	4	1

2) $4x^2 - 5y^2 = 3 \Leftrightarrow 4x^2 = 3 + 5y^2$ $5y^2 \equiv 0(5)$

Si $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution, alors

$4x^2 \equiv 3(5)$ (3)

d'après le tableau précédent, on a

$4x^2 \equiv 0(5)$; $4x^2 \equiv 4(5)$ ou $4x^2 \equiv 1(5)$

par produit

impossible d'obtenir 3 pour reste

Donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Ex 3: $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$

$a \equiv a'(m) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a = km + a'$

$b \equiv b'(m) \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / b = k'm + b'$ (2)

alors $a + b = \underbrace{(k + k')}_\in \mathbb{Z} m + (a' + b')$

Donc $(a + b) \equiv a' + b'(m)$