

Devoir n°3 - Divisibilité - T maths exp

9 janvier 2025 - 30 min

Exercice 1 : Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n + 1$ divise $n + 13$.

Exercice 2 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 432 par 17 ; en déduire, sans calculatrice, le quotient et le reste de la division euclidienne de -432 par 17.

Exercice 3 : Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 12$.

Exercice 4 : Le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4, et le reste de la division euclidienne de b par 7 est 6.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a - b$ par 7.

Ex1: $m \in \mathbb{Z} / (2n+1) \mid (m+13) ?$

$2n+1 \mid m+13$ et $2n+1 \mid 2n+1$

donc $2n+1 \mid 2(m+13) - (2n+1)$ par combinaison
linéaire
soit $2n+1 \mid 25$

on $\mathcal{D}_{25} = \{-25; -5; -1; 1; 5; 25\}$

$2n+1$	-25	-5	-1	1	5	25
m	-13	-3	-1	0	2	12
$m+13$	0	10	12	13	15	25

Réciproque: pour $m = -13$ $m+13 = 0$ et $-25 \mid 0$
on peut tester ainsi les autres valeurs
de m .

$S = \{-13; -3; -1; 0; 2; 12\}$

Ex2: $432 = 17 \times 25 + 7$ $0 \leq 7 < 17$

Dans la division euclidienne de 432 par 17
le quotient est 25 et le reste est 7.

donc $-432 = -17 \times 25 - 7 = -17 \times 25 - 17 + 10$

$\Leftrightarrow -432 = -17 \times 26 + 10$ avec $0 \leq 10 < 17$

le quotient est 26 et le reste est 10

Ex3: $x, y \in \mathbb{N}$ avec $x^2 - y^2 = 12$

$$x^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 12$$

$x+y \in \mathbb{N}$ on cherche les diviseurs positifs de 12

$$\mathcal{D}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=13 \\ x+y=1 \end{cases}$$

impossible

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=7 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=7 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ x+y=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=13 \\ x+y=12 \end{cases}$$

La seule solution est le couple (4; 2)

Ex4: On a $\begin{cases} a = 7xq + 4 \\ b = 7xq' + 6 \end{cases} \quad q, q' \in \mathbb{Z}$

$$1) \quad a+b = 7x(q+q') + 10 = 7x(q+q') + 7 + 3$$

$$\Leftrightarrow a+b = 7(q+q'+1) + 3 \quad \underline{\text{reste} = 3} \quad 0 \leq 3 < 7$$

$$2) \quad a-b = 7x(q-q') - 2 = 7x(q-q') - 7 + 5$$

$$\Leftrightarrow a-b = 7(q-q'-1) + 5 \quad \underline{\text{reste} = 5} \quad 0 \leq 5 < 7$$