Devoir n°2 - Nombres Complexes - T maths exp

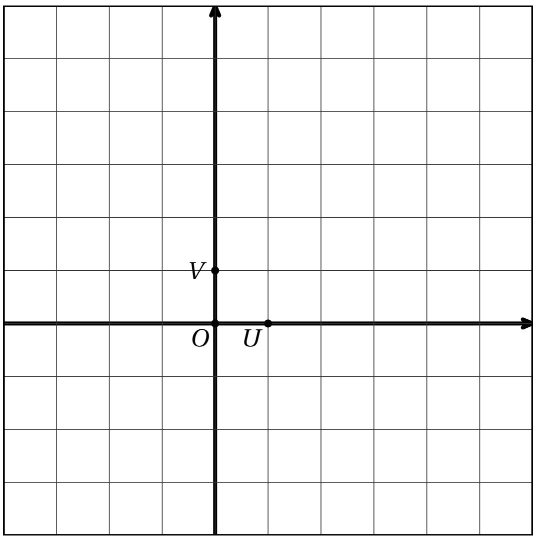
28 novembre 2024 - 1h15

Exercice 1 (1,5 pts) : Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $a = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $b = -3e^{3i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 (4 pts) : *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Indiquer si chacune des affirmations est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.*

1. Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$, $c = 1 + i\sqrt{3}$.
   Affirmation 1 : Les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : Le nombre complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$ est un nombre réel.

Exercice 3 (4,5pts) : Représenter les ensembles suivants après avoir justifié soigneusement :



$$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \ / \ |z - i| = |z + 1|\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \ / \ \arg(\frac{z - 2 + i}{z - 5i}) = \frac{\pi}{2}(\pi)\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \{M(z) \ / \ \arg(z - 1) = \frac{-\pi}{4}(2\pi)\}$$

Exercice 4 (7,5 pts) : On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8i\sqrt{3}$. On pose

$$Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Déterminer la forme algébrique de Z.
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Ecrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$
5. (Bonus) En utilisant ce qui précède et la formule d'addition de $cos(a + b)$, résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = -2\sqrt{3}$$

Exercice 5 (4,5 pts) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1. Placer les points A et B dans le repère de l'exercice 3.
2. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.
3. On considère l'équation

$$(E) \ : \ z^2 - \sqrt{6}\, z + 2 = 0.$$

   Montrer que l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.