Devoir n°2 - Nombres Complexes - T maths exp

28 novembre 2024 - 1h15

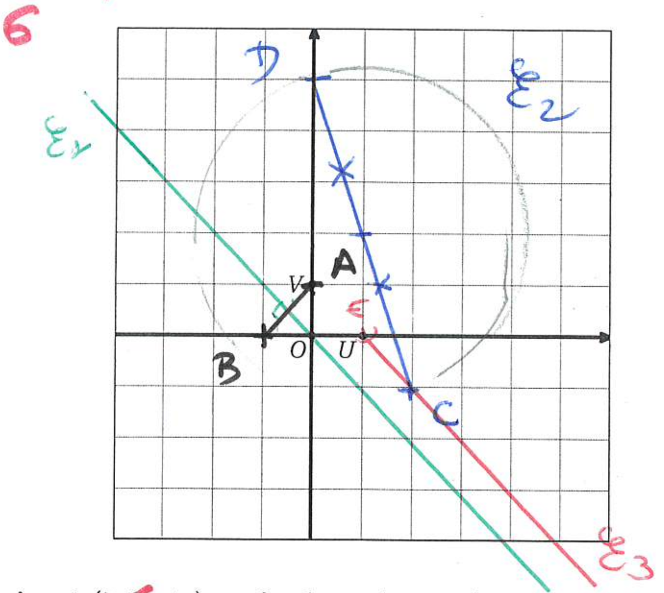
Exercice 1 (1,5 pts) : Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $a = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $b = -3e^{3i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 (~~4~~ 5 pts) : *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Indiquer si chacune des affirmations est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.*

1. Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2+2\mathrm{i}$, $b = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Affirmation 1 : Les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6$ est un nombre réel.

Exercice 3 (~~4~~,5pts) : Représenter les ensembles suivants après avoir justifié soigneusement :

6



$$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \ / \ |z-\mathrm{i}| = |z+1|\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \ / \ \arg(\frac{z-2+\mathrm{i}}{z-5\mathrm{i}}) = \frac{\pi}{2}(\pi)\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \{M(z) \ / \ \arg(z-1) = \frac{-\pi}{4}(2\pi)\}$$

Exercice 4 (~~7,5~~ pts) : On donne les nombres complexes : $z_1 = 1-\mathrm{i}$ et $z_2 = -8-8\mathrm{i}\sqrt{3}$. On pose

8

$$Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Déterminer la forme algébrique de Z.
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Ecrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$
5. (Bonus) En utilisant ce qui précède et la formule d'addition de $cos(a+b)$, résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x - (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = -2\sqrt{3}$$

Exercice 5 (4,5 pts) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

1. Placer les points A et B dans le repère de l'exercice 3.
2. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.
3. On considère l'équation

$$(E) \ : \ z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0.$$

Montrer que l'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

①

Ex 1 : $a = 4\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$= 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$
$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \underline{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}$

$b = -3e^{3i\pi/2}$
$= -3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$
$= -3\,(0 - i)$
$= \underline{3i}$

1,5

Ex 4 : $z_1 = 1 - i \qquad z_2 = -8 - 8i\sqrt{3}$

1) $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{-8-8i\sqrt{3}} = \frac{1-i}{-8(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{8} \times \frac{i-1}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

donc $Z = \frac{1}{8} \times \frac{i + \sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{32}\left(\sqrt{3} - 1 + (1+\sqrt{3})\,i\right)$

$$\underline{Z = \frac{\sqrt{3}-1}{32} + \frac{1+\sqrt{3}}{32}\,i}$$

1,5

2) • $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

Donc $z_1 = \underline{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}$

1

• $z_2 = -8 - 8i\sqrt{3}$ $\quad |z_2|^2 = 8^2 \times |1 + i\sqrt{3}|^2 = 64 \times (1+3) = 64 \times 4$
$= -8(1 + i\sqrt{3})$ $\quad$ donc $|z_2| = \sqrt{64 \times 4} = 8 \times 2 = 16$

alors $z_2 = 16 \times \left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \begin{cases} \cos\theta = -1/2 \\ \sin\theta = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$ $\quad \theta = \frac{-2\pi}{3}\ (2\pi)$

et $z_2 = \underline{16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

1,5

3) $Z = \frac{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}{16\,e^{-i\,2\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{16} \times e^{-i\pi/4 + i\frac{2\pi}{3}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{16}\,e^{i\,5\pi/12}}$

1

Ainsi $\underline{Z = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)}$

0,5

4) or $Z = \frac{\sqrt{3}-1}{32} + \frac{1+\sqrt{3}}{32}\,i$

donc $\frac{\sqrt{2}}{16}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{32} \iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{32\sqrt{2}} \times 16$

$\iff \underline{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

2

Ex2: 1) $\begin{cases} a = 2+2i \\ b = -\sqrt{3}+i \\ c = 1+i\sqrt{3} \end{cases}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}-2 \\ -1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1 \\ \sqrt{3}-2\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1\end{pmatrix}$

2,5

$(-\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-2) - (-1)\times(-1)$
$= -(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2) - 1$
$= -(3-4) - 1$
$= 0$

1,5

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires
donc A, B, C alignés
Vrai

2) soit $z = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$
alors $z^6 = (1+i\sqrt{3})^6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi/3\times 6} = 64e^{i2\pi}$
$= 64(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$
$= 64(1 + 0\times i) = 64$

2,5

c'est un réel
VRAi

Ex3: $E_1 = \{M(z) / |z-i| = |z+1|\}$
soient $A(i)$ et $B(-1)$ $M(z) \in E_1 \Leftrightarrow AM = BM$
E_1 est la médiatrice de $[AB]$

1,5

$E_2 = \left\{M(z) / \arg\left(\frac{z-2+i}{z-5i}\right) = \pi/2 \ (\pi)\right\}$

3

Soient $C(2-i)$ et $D(5i)$
$M(z) \in E_2 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_D}\right) = \pi/2 \ (\pi)$

1,5

$\Leftrightarrow (\vec{DM}, \vec{CM}) = \pi/2 \ (\pi)$
E_2 est le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D

$E_3 = \{M(z) / \arg(z-1) = \frac{-\pi}{4} \ (2\pi)\}$
Soit $E(1)$ $M(z) \in E_3 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{EM}) = \frac{-\pi}{4} \ (2\pi)$

1,5

E_3 est la demi-droite $]EF)$

②

et $\frac{\sqrt{2}}{16}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{32} \iff \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{32\sqrt{2}} \times 16$

$\iff \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 1

5) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x - (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = -2\sqrt{3}$

$\iff 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x - 4\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x = -2\sqrt{3}$

$\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}+x\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

$\iff \frac{5\pi}{12}+x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{12}+x = \frac{-5\pi}{6} + 2k'\pi$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\iff x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-15\pi}{12} + 2k'\pi$

$\frac{-15\pi}{12} = \frac{-5\pi}{4} = \frac{-8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \ (k, k' \in \mathbb{Z})\right\}$

Ex 5 :

$z_A = 2e^{i\pi/4}$

$z_B = 2e^{i3\pi/4}$

1) repère

2) $|z_A| = |z_B| = OA = OB = 2$

de plus $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\pi/4}}{2e^{i3\pi/4}} = e^{i(\pi/4 - 3\pi/4)} = e^{-i\pi/2}$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\pi/2 \ (2\pi) \iff (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = -\pi/2 \ (2\pi)$ donc $(OA) \perp (OB)$

Le triangle OAB est donc isocèle et rectangle en O

3) $(E) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0$ $\quad \Delta = -2 \quad -\Delta = 2$

$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ $\quad S = \{z_1 ; z_2\}$

$z_A = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

et $z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle OAB a pour centre $I(i\sqrt{2})$ le milieu de [AB]

Le rayon $R = IA = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} z_1 - z_I = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 - z_I = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$|z_1 - z_I|^2 = \frac{6}{4} + 6 = \frac{15}{2}$

et $|z_2 - z_I|^2 = \frac{6}{4} + \frac{2}{4} = 2$

Donc $|z_2 - z_I| = \sqrt{2} = R$ $\quad z_2$ est l'affixe d'un point situé sur le cercle $\mathcal{C}$.