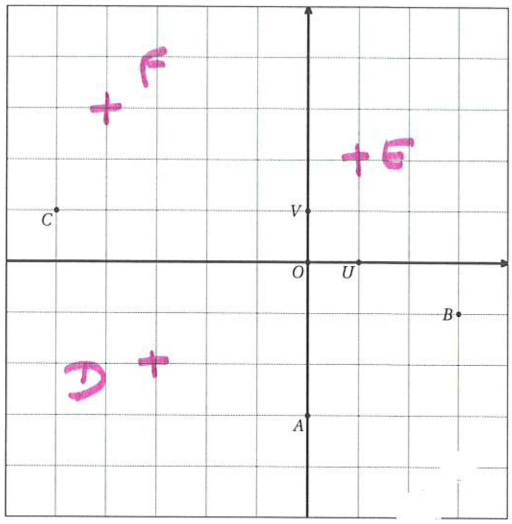
Devoir n°1 - Nombres Complexes - T maths exp

14 novembre 2024 - 1h

Exercice 1 (1,5 pts) :



1. Lire graphiquement les affixes des points A, B et C.
2. Placer les points $D(-3-2\mathrm{i})$, $E(1+2\mathrm{i})$ et $F(3\mathrm{i}-4)$.

A (-3i) B(3-i) C(-5+i)

Exercice 2 (4 pts) :

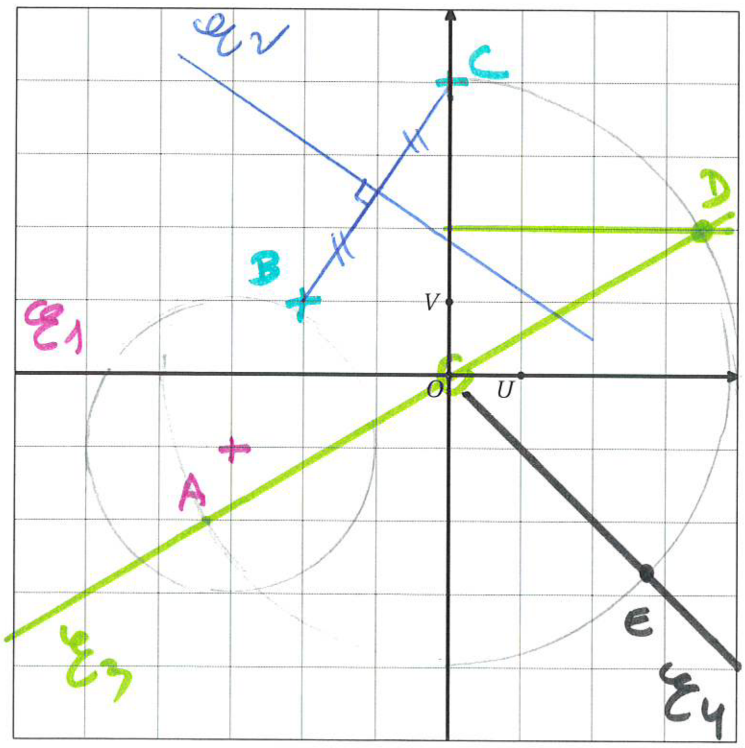
1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, et donner leur forme trigonométrique :

$a_1 = -5\mathrm{i}$ $\qquad$ $a_2 = -2+2\mathrm{i}$ $\qquad$ $a_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$

2. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$b_1 = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3}))$ $\qquad$ $b_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6}))$

Exercice 3 (5,5 pts) : Représenter les ensembles suivants après avoir justifié :



$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \;/\; |z+3+\mathrm{i}| = 2\}$

$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \;/\; |z+2-\mathrm{i}| = |z-4\mathrm{i}|\}$

$\mathscr{E}_3 = \{M(z) \;/\; \arg(z) = \dfrac{\pi}{6}(\pi)\}$

$\mathscr{E}_4 = \{M(z) \;/\; \arg(\overline{z}) = \dfrac{\pi}{4}(2\pi)\}$

Ex 2 : 1) • $a_1 = -5i$ $|a_1| = 5$ et $\arg a_1 = \frac{-\pi}{2} \ (2\pi)$

donc $a_1 = 5\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$ 0,5

14

• $a_2 = -2+2i$ $|a_2|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Leftrightarrow |a_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

alors $a_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ 1,25

$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$ et $a_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

• $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$ $|a_3|^2 = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow |a_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

alors $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ 1,25

$\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\theta_3 = \frac{-\pi}{3} \ (2\pi)$ et $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

2) $b_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
$= 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -1 + i\sqrt{3}$ 0,5

$b_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 0,5

Ex 3 : • $\mathcal{E}_1 = \{M(z) / |z+3+i| = 2\}$ 5,5

Soit $A(-3-i)$ $M(z) \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow |z-(-3-i)| = 2$
$\Leftrightarrow AM = 2$ 1,25

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre A de rayon 2

• $\mathcal{E}_2 = \{M(z) / |z+2-i| = |z-4i|\}$

Soient $B(-2+i)$ et $C(4i)$ 1,75

$M(z) \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow |z-(-2+i)| = |z-4i| \Leftrightarrow BM = CM$

$\mathcal{E}_2$ est la médiatrice de $[BC]$

• $\mathcal{E}_3 = \{M(z) / \arg(z) = \pi/6 \ (\pi)\}$ 1

$\mathcal{E}_3$ est la droite (OD) privée du point O

avec $\arg(z_D) = \pi/6 \ (2\pi)$

• $\mathcal{E}_4 = \{ M(z) \,/\, \arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} (2\pi) \}$

$\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} (2\pi) \iff -\arg z = \pi/4 \, (2\pi)$

$\iff \arg z = -\pi/4 \, (2\pi)$

$\mathcal{E}_4$ est la demi-droite $]OE)$ 1,5

avec $\arg(z_E) = \frac{-\pi}{4} (2\pi)$

Ex 4 :

$z_A = 3$

$z_B = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} i$

$z_C = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} i$

$z_I = 1 + \frac{3}{2} i$

1) $\vec{AB}\left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2} i\right) \quad \vec{AC}\left(\frac{-7}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

$$\begin{cases} AB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = \frac{50}{4} \\ AC^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{50}{4} \end{cases}$$

$AB^2 = AC^2 \iff AB = AC$

donc ABC est isocèle en A 1,5

2) I milieu de $[BC]$

donc $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = 1 + \frac{3}{2} i$. 0,5

4,5

3) ABDC parallélogramme

$\iff \vec{AB} = \vec{CD} \iff \vec{BD} = \vec{AC}$

$\iff$ I milieu de $[BC]$ et de $[AD]$

$\vec{BD}\left(z_D - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} i\right)\right) \quad \vec{AC}\left(\frac{-7}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

Posons $z_D = a + ib$; il s'agit de résoudre

$(a+ib) - (5/2 + 7/2\, i) = \frac{-7}{2} - \frac{1}{2} i$

$\iff (a - 5/2) + (b - 7/2) i = -7/2 - 1/2\, i$

$\iff \begin{cases} a - 5/2 = -7/2 \\ b - 7/2 = -1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \quad z_D = -1 + 3i$ 2

Ex 5 : $(E) : z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

14,5

1) $Z^2 + 4Z + 16 = 0 \quad : (E')$

$\Delta = 16 - 4 \times 16 = 16 - 64 = -48 = 48 i^2$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{-4 - i \times 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3} \\ Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

2

$S' = \{-2 - 2i\sqrt{3} ; -2 + 2i\sqrt{3}\}$

2) a) $|a| = 2$

$\arg a = \pi/3 \ (2\pi)$

donc $a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + i\sqrt{3}$

1

b) $a^2 = (1 + i\sqrt{3})^2$

$= 1 + 2i\sqrt{3} - 3$

$= -2 + 2i\sqrt{3}$

0,5

c) $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} = a^2 \iff z = \pm a$

0,5

$S = \{-1 - i\sqrt{3} ; 1 + i\sqrt{3}\}$

3) Bonus : z solution de (E)

$\Rightarrow z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

$\Rightarrow \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0}$

$\Rightarrow \overline{z^4} + \overline{4z^2} + \overline{16} = 0$

$\Rightarrow \bar{z}^4 + 4\bar{z}^2 + 16 = 0$

$\Rightarrow \bar{z}$ solution de (E)

En posant $Z = z^2$

(E) devient

$Z^2 + 4Z + 16 = 0$

d'après 1) et 2)

$Z = a^2$ est une des solutions

donc a et $-a$ sont solutions de (E)

et $\bar{a}$ et $-\bar{a}$

leurs conjugués.

$S = \{-1 - i\sqrt{3} ; 1 + i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3} ; 1 - i\sqrt{3}\}$