Devoir de mathématiques n^o 10 - 1èreS

18 avril 2012 - 2h

Exercice 1 (5 points)

Le cycle des feux tricolores aux carrefours est le suivant :
- l'événement V : « Le feu est vert »dure 20 secondes.
- l'événement O : « Le feu est orange »dure 5 secondes.
- l'événement R : « Le feu est rouge »dure 35 secondes.

Le temps total d'un cycle est donc de 1 min.

1. Déterminer $p(V)$.
2. Un automobiliste rencontre successivement trois feux tricolores fonctionnant de manière indépendante. Dresser un arbre pondéré illustrant la situation.
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A :« l'automobiliste rencontre trois feux verts »
   (b) B :« l'automobiliste rencontre un feu vert, un feu rouge et un feu orange dans cet ordre »
   (c) C :« l'automobiliste rencontre au moins un feu vert »

Exercice 2 (6 points)

Un QCM (questionnaire à choix mutiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

Partie A :

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
3. Etablir la loi de probabilité de X en complétant le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes, puis arrondies au millième :

valeurs x_i	0					

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

Partie B :

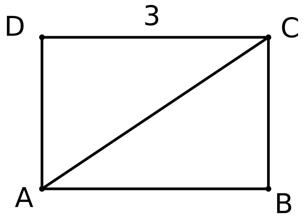
On suppose que n candidats (n entier non nul) répondent à ce QCM, et que tous le font au hasard, indépendamment des autres.

1. Exprimer en foncion de n.la probabilité p_n qu'au moins un candidat obtienne la note 5.
2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

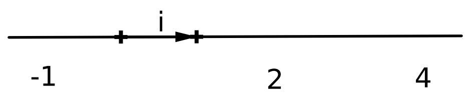
Exercice 3 (5 points)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des 5 cas suivants :

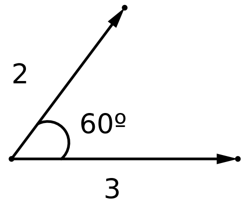
1)



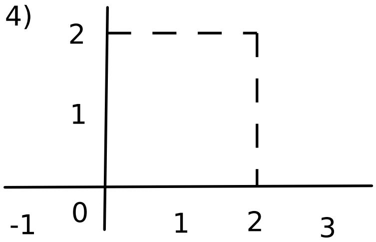
2)



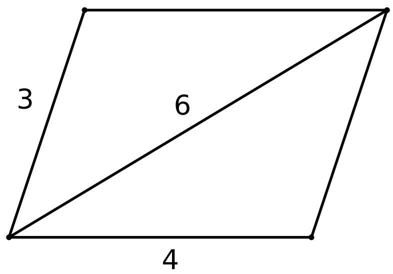
3)



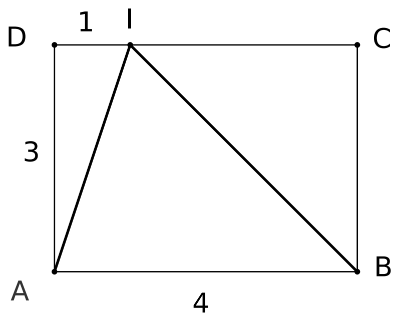
4)



5)



Exercice 4 (4 points)



$ABCD$ est un rectangle, I est un point de $[DC]$ défini comme l'indique la figure ci-contre.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC} + DA^2$
2. Calculer les longueurs AI et BI.
   En déduire que : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 6$ et que $cos(\widehat{AIB}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
3. Donner la mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ en degrés à 0,1 degré près.

Complément de l'exercice 2 : Partie C :

Pour pénaliser les candidats qui ne comptent que sur le hasard, on décide de toujours accorder 1 point par réponse exacte, mais cette fois d'enlever 0,2 point par réponse inexacte.
Soit Y la nouvelle variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Prouver qu'avec cette nouvelle règle, la variable aléatoire Y s'exprime par $Y = 1,2X - 1$..
2. En déduire la probabilité qu'un candidat obtienne une note négative, une note au-dessus de la moyenne.
3. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir ? L'objectif vous parait-il atteint ?