Correction du devoir n° 5 – 1S

Ex 1 : $f(x) = x^2 - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$
$g(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ /7,5

1) Graphiquement, l'équation $f(x) = 3$ a pour solutions les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 3$ 1

On lit $\underline{S = \{-1\,;2\}}$ 0,25

2) $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\iff x^2 - x + 1 = \dfrac{3x-2}{x-2}$

$\iff (x^2-x+1)(x-2) = 3x-2$

$\iff x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 3x - 2$

$\iff x^3 - 3x^2 = 0$ 2

$\iff x^2(x-3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 3$ $\underline{S = \{0\,;3\}}$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses 0 et 3

0,5

3) Graphiquement, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ a pour solutions les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$. 1

On lit $\underline{S = \{0\} \cup]2\,;3]}$ 0,5

$f(x) \leq g(x)$

$\iff x^2 - x + 1 \leq \dfrac{3x-2}{x-2}$

3,75 $\iff \dfrac{x^2(x-3)}{x-2} \leq 0$

1,5

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	‖	+		+
$x-3$	−		−	‖	−	0	+
$x-2$	−		−	‖	+		+
$f(x)-g(x)$	+	0	+	‖	−	0	+

On retrouve $\underline{S = \{0\} \cup]2\,;3]}$

Ex2 : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 16

1) $\begin{cases} f(-1+x) = \frac{(-1+x)^2+3}{(-1+x)+1} = \frac{4-2x+x^2}{x} \\ f(-1-x) = \frac{(-1-x)^2+3}{(-1-x)+1} = \frac{4+2x+x^2}{-x} = \frac{-4-2x-x^2}{x} \end{cases}$ $x \neq 0$

$\frac{1}{2}\left(f(-1+x)+f(-1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4-2x+x^2}{x} + \frac{-4-2x-x^2}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{-4x}{x} = -2$

2,5 Donc $I(-1;-2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

2) $ax+b+\frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} = f(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$ donc $\boxed{f(x) = x-1+\frac{4}{x+1}}$

1,5

3) Soit $\mathcal{D}$: $y = x-1$

$f(x) - (x-1) = \frac{4}{x+1}$ 0,75

donc si $x > -1$, $\frac{4}{x+1} > 0$ et $f(x) > x-1$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$

1,25 et si $x < -1$, $\frac{4}{x+1} < 0$ et $f(x) < x-1$

$\mathcal{C}_f$ au-dessous de $\mathcal{D}$

Ex3 : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$

17

1) $\mathcal{D} : y = 2x - 3$ 0,5

2) $P(x) = f(x) - (2x-3) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ définie sur $\mathbb{R}$

ⓐ $P(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$

0,5 1 est racine de P donc $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

Directement, on a $a = 1$ et $c = -8$

$(x-1)(x^2 + bx - 8) = x^3 + (b-1)x^2 - (8+b)x + 8 = P(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = -3 \\ 8 + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 1 = -3 \text{ vérifié} \\ b = -2 \end{cases}$

2

Donc $\underline{P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8)}$

ⓑ il s'agit de résoudre $P(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad \sqrt{\Delta} = 6$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$

1,5 $\underline{S = \{-2 ; 1 ; 4\}}$

Donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en 3 points de

1,5 coordonnées $(-2 ; -7)$; $(1 ; -1)$ et $(4 ; 5)$

ⓒ il s'agit de déterminer le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2x - 8$ ($a = 1$)		$+$ signe de a	0	$-$ de $-a$		$-$	0	$+$ de a.	
1,5 $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ quand $P(x) \geq 0$

soit pour $x \in [-2 ; 1] \cup [4 ; +\infty[$

2,5 $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$ quand $P(x) \leq 0$

soit pour $x \in]-\infty ; -2] \cup [1 ; 4]$.

Devoir de mathématiques n^o 5 - 1èreS

2 dec 2010 - 1H

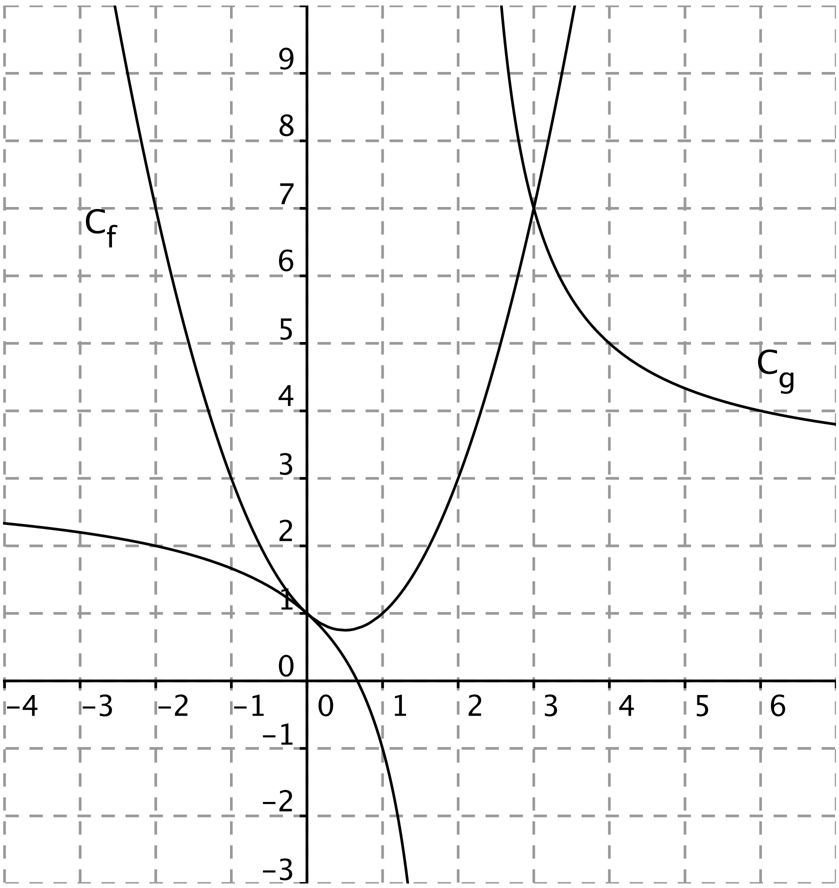
Exercice 1 (7 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = x^2 - x + 1 \qquad\qquad g(x) = \frac{3x-2}{x-2}$$

ci-dessous, C_f et C_g, leurs courbes représentatives.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
2. Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$ puis interpréter graphiquement.
3. Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$ puis le démontrer par le calcul.



Exercice 2 (6 points)

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, admet pour centre de symétrie $I(-1;-2)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.

Exercice 3 (7 pts)

On donne $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 5$,
et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ci-jointe.

1. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ sur le graphique ci-joint.
2. Soit $P(x) = f(x) - (2x - 3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (a) Vérifier que 1 est racine de P
   et factoriser $P(x)$.
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.
   (c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.