Devoir de mathématiques n^o 1 - 1èreS

21 septembre 2010 - 1H

Exercice 1 : (3pts)
On considère deux points A et B distincts du plan.

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et montrer ainsi qu'il existe un unique point G tel que :
$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$
G est appelé barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, 2)$.
2. Pour tout k réel $\neq 0$, montrer que G est aussi barycentre de $(A, 3k)$ et $(B, 2k)$..
3. Pour tout point M quelconque, montrer que : $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$.

Exercice 2 : (5pts)
ABC est un triangle de centre de gravité G ; G' est le symétrique de G par rapport au milieu I de $[BC]$.

1. Montrer que G est le milieu de $[G'A]$.
2. Justifier que : $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$, puis en déduire que G' est barycentre de A, B et C affectés de coefficients à préciser.

Exercice 3 : (4,5pts)
ABC est un triangle ; les points I et G sont tels que : $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

1. Justifier que I est barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 3)$, et G celui de $(A, 2)$ et $(I, 1)$.
2. En déduire que G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$.

Exercice 4 : (4pts)
ABC est un triangle quelconque avec $AB = 6$ et $AC = 4$; on se propose de trouver l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$$|| -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} ||= 6$$

1. Utiliser G barycentre de $(A, -2)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$ pour réduire la somme vectorielle : $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.
2. Montrer que "$M \in \Gamma \Leftrightarrow GM = 3$".
3. En déduire la nature de Γ ; placer G et construire Γ.

Exercice 5 : (3,5pts)
ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de $[BC]$; J et K sont les points tels que
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$
On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Calculer les coordonnées des points I, J et K.
2. Montrer que I, J et K sont alignés.