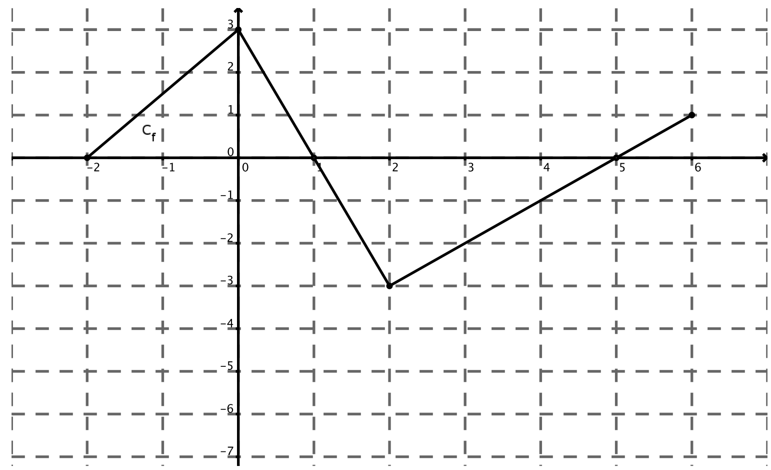
Devoir de mathématiques n^o 5 - 1èreS

26 novembre 2008 - 2H

Exercice 1 :

1. La courbe ci-contre représente une fonction f.



   Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f-4$ en bleu
   (b) $\dfrac{1}{2}f$ en noir
   (c) $|f|$ en rouge
   (d) $-f$ en pointillés noirs

2. Décomposer très soigneusement les fonctions f et g à l'aide de 3 fonctions simples (fonctions de référence ou associées), et donner leur domaine de définition en justifiant.

$$f(x) = 4(x-1)^2 \qquad et \qquad g(x) = 2 + \frac{1}{x^2-1}$$

3. Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ définie dur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
   (a) Montrer que f est majorée par 1 sur $]-1;+\infty[$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie le point $I(-1;1)$.
   (c) En déduire que f est aussi minorée sur $]-\infty;-1[$; préciser le plus grand de ses minorants.

Exercice 2 : Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad et \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

1. (a) Vérifier que $f(x) = (x-1)^2 - 4$; en déduire que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, est l'image de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que :
   $$g(x) = -\frac{1}{2}(x+a)^2 + b$$
   En déduire que la courbe Γ représentative de la fonction g est l'image de la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.
2. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ.
   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Γ.

Exercice 3 : Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation :

$$y = x^2 - 4x + 5$$

Soient A le point de coordonnées $(1; 3)$ et Δ_m la droite passant par le point A de coefficient directeur m.
On note M_1 et M_2 les points d'intersection de Δ_m et de $\mathscr{P}$.

1. (a) Déterminer l'équation de la droite Δ_m, en fonction de m.
   (b) Démontrer que les abscisses des points M_1 et M_2 sont les solutions de l'équation (E) :
   $$x^2 - (4 + m)x + (m + 2) = 0$$
   (c) Démontrer, sans résoudre l'équation (E), qu'elle admet deux solutions distinctes pour toute valeur de m.
   (d) Démontrer que le point A est le milieu de $[M_1M_2]$ si et seulement si $m = -2$.
2. On considère la droite D_p d'équation $y = -2x + p$, avec p nombre réel quelconque.
   (a) Justifier que les droites Δ_{-2} et D_p sont parallèles pour toute valeur de p.
   (b) Démontrer qu'il existe une valeur de p pour laquelle la droite D_p et la parabole $\mathscr{P}$
   ont un unique point commun B. Calculer cette valeur de p et les coordonnées du point B.