# Devoir n$^{o}$14 - Equations différentielles - TSpé maths

4 mai 2023 - 1h

**Exercice 1 (6 pts) :** Soit $(E)$ l'équation différentielle

$$y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction $g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de $(E)$.
2. Montrer qu'une fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si la fonction $(f - g)$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
3. Résoudre $(E')$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)$.
5. Déterminer l'unique solution $h$ de l'équation différentielle $(E)$ telle que $h(0) = 2$.

**Exercice 2 (7 pts) :** Lors d'une course, un cycliste professionnel descend une route rectiligne, pentue et très longue.
On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant $t$, où $t$ est exprimé en seconde et $v(t)$ en mètre par seconde.
On suppose de plus, que la fonction $v$ ainsi définie est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction $v$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) \ : \ 10y' + y = 30$$

Enfin, on suppose que, lorque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$ ; en déduire l'expression de $v(t)$.
2. Etudier les variations de $v$ sur $[0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de $v$ en $+\infty$.
4. La vitesse du cycliste est stabilisée lorsque accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1\ m.s^{-2}$.
   Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de $t$ à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

**Exercice 3 ( pts) :** On veut résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3.$$

1. Montrer que l'équation $(E)$ admet comme solution une fonction polynôme du second degré $h$ que l'on déterminera.

2. Soit $g$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $g$ est solution de $(E)$ si et seulement si $(g - h)$ est solution de $(E_0) : y'' - y' - 6y = 0$.

Que du Bonus !

3. On admet que si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + c = 0$ (où $a$, $b$ et $c$ sont des réels), possède deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, alors les solutions de l'équation $ay'' + by' + c = 0$ sont de la forme $x \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$, où $A$ et $B$ sont des réels.

   a) Résoudre l'équation $(E_0)$.
   b) En déduire toutes les solutions l'équation $(E)$.

4. Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.