Correction du dev n°14 - Eq diff

Ex 1 : (E) : $y' + y = e^{-x}$

1) $g(x) = xe^{-x}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - g(x)$

on a donc $g'(x) + g(x) = e^{-x}$;

g est solution de (E) 1

2) f solution de (E) $\Leftrightarrow f' + f = e^{-x}$ or $g' + g = e^{-x}$

donc $(f' + f) - (g' + g) = 0 \Leftrightarrow (f-g)' + (f-g) = 0$

$\Leftrightarrow (f-g)$ solution de $(E') : y' + y = 0$

réciproquement, $(f-g)$ solution de (E)

$\Leftrightarrow (f-g)' + (f-g) = 0 \Leftrightarrow f' - g' + f - g = 0$

or $g' + g = e^{-x}$

donc $f' + f - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f' + f = e^{-x}$

$\Leftrightarrow$ f solution de (E)

on a donc f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(f-g)$ solution de (E')

2

3) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

on reconnait l'équation $y' = ay$ avec $a = -1$

donc $S = \{Ke^{-x} / K \in \mathbb{R}\}$ 1

4) $(f-g)$ solution de (E') donc $(f-g)(x) = Ke^{-x}$

alors $f(x) = Ke^{-x} + g(x) = (x+K)e^{-x}$ $(K \in \mathbb{R})$

ensemble des solutions de (E) 1

5) on cherche $h(x) = (x+K)e^{-x}$

avec $h(0) = 2$ donc $Ke^{0} = 2 \Leftrightarrow K = 2$

soit $h(x) = (x+2)e^{-x}$ 1

Ex 2 : $(E) : 10y' + y = 30$

1) $10y' + y = 30 \iff y' = -\frac{1}{10}y + 3$ 0,5

on reconnait une equation du type $y' = ay + b$

avec $a = \frac{-1}{10}$ et $b = 3$ $\quad \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1/10} = 30$

donc $S = \{ Ke^{-\frac{1}{10}t} + 30 \,/\, K \in \mathbb{R} \}$

1,5

$v(t) = Ke^{-1/10\, t} + 30$

or $v(0) = 0 \iff K + 30 = 0 \iff K = -30$

donc $v(t) = -30e^{-1/10\, t} + 30 = 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$ 1

2) $v'(t) = 30 \times \left(-\left(\frac{-1}{10}\right)e^{-\frac{1}{10}t}\right) = 3e^{-\frac{1}{10}t}$ 1

$v'(t) > 0$ donc v strictement croissante sur $[0; +\infty[$

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-1}{10}t = -\infty$

$X = \frac{-1}{10}t \quad \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Par composition, somme et produit $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 30}$ 1

4) $v'(t) < 0,1$

$\iff 3e^{-1/10\, t} < 0,1$

$\iff e^{-1/10\, t} < \frac{1}{30}$

$\iff -\frac{1}{10}t < \ln\left(\frac{1}{30}\right)$

$\iff -\frac{1}{10}t < -\ln(30)$ 2

$\iff \boxed{t > 10\ln(30)}$ car $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$10\ln(30) \simeq$

Donc la vitesse du cycliste est stabilisée à partir de 35 s

Ex 3 : (E) : $y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$

1) soit $h(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R})$
définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = 2ax + b$

$h''(x) = 2a$

h solution de (E) $\iff 2a - (2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = -6x^2 + 4x - 3$

$\iff -6ax^2 + (-2a - 6b)x + (2a - b - 6c) = -6x^2 + 4x - 3$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} -6a = -6 \\ -2a - 6b = 4 \\ 2a - b - 6c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad h(x) = x^2 - x + 1$$

2) g solution de $(E) \iff g'' - g' - 6g = -6x^2 + 4x - 3$
or $h'' - h' - 6h = -6x^2 + 4x - 3$
par différence, $(g'' - g' - 6g) - (h'' - h' - 6h) = 0$

$\iff (g - h)'' - (g - h)' - 6(g - h) = 0$

$\iff (g - h)$ est solution de (E_0) : $y'' - y' - 6y = 0$

Réciproquement $(g - h)$ solution de (E_0)

$\iff (g - h)'' - (g - h)' - 6(g - h) = 0$

$\iff (g'' - g' - 6g) - (h'' - h' - h) = 0$ or $h'' - h' - 6h = -6x^2 + 4x - 3$

Donc $g'' - g' - g = -6x^2 + 4x - 3 \iff g$ solution de (E)

on a bien g solution de $(E) \iff (g - h)$ solution de (E_0)

3) ⓐ L'équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2 - r - 6 = 0$

2 est racine évidente.

donc $r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r+3) = 0$

$S = \{-3 ; 2\}$

Alors les solutions de (E_0) sont de la forme

$$\underline{Ae^{-3x} + Be^{2x}} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

ⓑ g solution de $(E) \Leftrightarrow (g-h)$ solution de (E_0)

donc $(g-h)(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

et $\underline{g(x) = (x^2 - x + 1) + Ae^{-3x} + Be^{2x}}$ $(A, B \in \mathbb{R})$

4) f solution de (E)

donc $f(x) = (x^2 - x + 1) + Ae^{-3x} + Be^{2x}$

$f'(x) = (2x - 1) - 3Ae^{-3x} + 2Be^{2x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + A + B = 1 \\ -1 - 3A + 2B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 & (L_1) \\ -3A + 2B = 5 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5B = 5 & 3(L_1) + (L_2) \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = -1 \end{cases}$$

Donc $\underline{f(x) = (x^2 - x + 1) - e^{-3x} + e^{2x}}$