Devoir n°13 - Fonction Exponentielle - TSpé maths

9 mars 2023 - 1h

Seul l'exercice 1 est évalué !

Exercice 1 (10 pts) :

Partie I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II : Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné ci-dessous.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

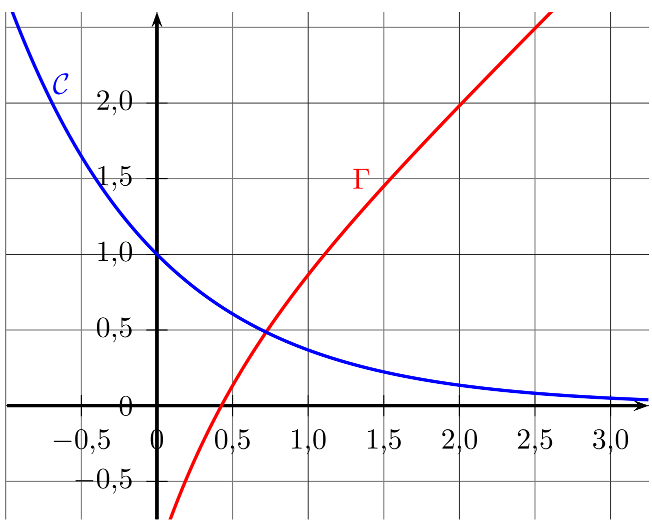
1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t \ ; \ \mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathcal{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :
   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$
   a) Montrer que, pour tout nombre réel t,
   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$
   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha \ ; \ \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le **graphique**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

   a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

   b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
   Tracer ces droites sur le **graphique.**



Exercice 2 : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.*

1. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$.
   On donne la dérivée seconde f'' de f, définie sur $]0,+\infty[$ par : $f''(x)=\frac{2\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$

   i. La fonction f', dérivée de f, est définie sur $]0,+\infty[$ par :

   a) $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$
   b) $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$
   c) $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$
   d) $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$

   ii. La fonction f

   a) est décroissante sur $]0,+\infty[$
   b) est monotone sur $]0,+\infty[$
   c) admet un minimum en $\frac{1}{2}$
   d) admet un maximum en $\frac{1}{2}$

   iii. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

   a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) e^{2x}

   iv. La fonction f est :

   a) concave sur $]0,+\infty[$
   b) convexe sur $]0,+\infty[$
   c) concave sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$
   d) représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

2. *i.* L'équation (E) : $\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+1=0$ admet dans $\mathbb{R}$:

   a) 0 solution
   b) 1 solution
   c) 2 solutions
   d) Une infinité de solutions

   ii. Pour tout réel x, l'expression $g(x)=3+\frac{-7\mathrm{e}^{-x}+4}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ est égale à :

   a) $\dfrac{-7\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}+1}$ b) $\dfrac{-4\mathrm{e}^{x}+7}{\mathrm{e}^{x}+1}$ c) $\dfrac{7\mathrm{e}^{x}-4}{\mathrm{e}^{x}+1}$ d) $\dfrac{4\mathrm{e}^{x}-7}{\mathrm{e}^{x}+1}$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$.
   Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors :

   a) $F(x)=-\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$
   b) $F(x)=-\frac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$
   c) $F(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$
   d) $F(x)=x^2\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

4. Que vaut : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}-1}$?

   a) -1 b) 1 c) $+\infty$ d) N'existe pas

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3\mathrm{e}^{-x^2}+2$.
   Si on considère l'ensemble des primitives de f :

   a) Toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$
   b) Toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$
   c) Certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres sont décroissantes sur $\mathbb{R}$
   d) Toutes sont croissantes sur $]-\infty,0]$ et décroissantes sur $[0,+\infty[$

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x-2\mathrm{e}^{x}$.
   L'équation réduite d'une asymptote à la courbe représentative de f est :

   a) $y=0$ b) $y=-2\mathrm{e}^{x}$ c) $y=3x$ d) $y=3x-2$