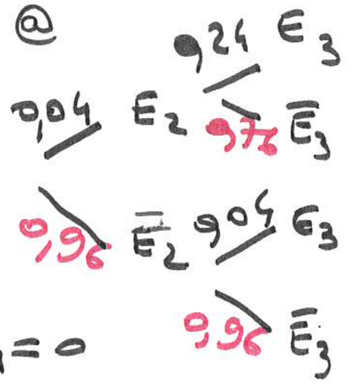
Correction du dev 7 - 1ère

Ex 1 : 2) il semble que la suite (u_n) soit croissante et convergente vers 4

Ex 2

1) ⓐ



$P_1 = 0$

D'après la formule des probabilités ~~totales~~ totales

$p_3 = p(E_3) = p(E_2 \cap E_3) + p(\overline{E_2} \cap E_3)$
$= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04$
$= \boxed{0,048}$

ⓑ $\boxed{p_{E_3}(E_2)} = \dfrac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \dfrac{0,04 \times 0,24}{0,048} = 0,2$

2) ⓐ arbre

ⓑ $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ probabilités totales
$= p_n \times 0,24 + (1 - p_n) \times 0,04$
$= 0,24\, p_n + 0,04 - 0,04\, p_n$
$= \boxed{0,2\, p_n + 0,04}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

ⓒ $\boxed{u_n = p_n - 0,05} \iff p_n = u_n + 0,05$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$
$= (0,2\, p_n + 0,04) - 0,05$
$= 0,2\, p_n - 0,01$
$= 0,2(u_n + 0,05) - 0,01$
$= 0,2\, u_n + 0,01 - 0,01$
$= 0,2\, u_n$

$u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ de 1er terme $u_1 = -0,05$

ⓓ alors $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$

et $p_n = u_n + 0,05 = \boxed{0,05 - 0,05 \times (0,2)^{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

ⓔ $p_{n+1} - p_n = (0,05 - 0,05 \times 0,2^{n}) - (0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1})$
$= -0,05 \times 0,2^{n} + 0,05 \times (0,2)^{n-1}$
$= 0,05 \times (0,2)^{n-1} (-0,2 + 1) = 0,05 \times (0,2)^{n-1} \times 0,8$

$p_{n+1} - p_n > 0$ donc (p_n) est croissante

ⓕ il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < 0,2 < 1 \right)$

Au fil du temps, la probabilité que le salarié soit absent pour maladie se rapproche de 0,05.

Ex 3 : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ sur $\mathbb{R}$

1) a) $\boxed{f'(x) = -3x^2 + 6x - 2x}$

b) $\Delta = 36 - 4 \times 3 \times 2 = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}4 \\ x_2 = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{-6} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \simeq 1{,}6 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	

$a = -3$
du signe de a à l'extérieur des racines

2) $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n - 6$ (pour $n \in \mathbb{N}$)

a) $u_0 = -6$; $u_1 = -1 + 3 - 2 - 6 = -6$;
et $u_2 = -8 + 3 \times 4 - 4 - 6 = -6$

b) $u_n = f(n)$ avec f sur $[0 ; +\infty[$
d'après la question 1) b), f est croissante
sur $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$ $\qquad \frac{3+\sqrt{3}}{3} \simeq 1{,}6$

donc (u_n) décroissante à partir de $n = 2$
(et même pour tout $n \in \mathbb{N}$
puisque $u_0 = u_1 = u_2$)

Ex 4 : $f(x) = \frac{3x-2}{x+2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et $g(x) = x^2+2x-1$ sur $\mathbb{R}$

1) $f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x-2)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x+2}{(x+2)^2} = \boxed{\frac{8}{(x+2)^2}}$

$f'(x) > 0$ donc

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

2) $\boxed{g'(x) = 2x+2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3) a) (T) : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \frac{8}{4} = 2$ et $f(0) = \frac{-2}{2} = -1$.

donc $y = 2x-1$

b) (T') : $y = g'(0)\times(x-0) + g(0)$

$g'(0) = 2$ et $g(0) = -1$

donc $y = 2x-1$

c) Effectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune en $A(0\,;-1)$

---

4) Bonus

a) $f(x)-g(x) = \frac{3x-2}{x+2} - (x^2+2x-1) = \frac{3x-2-(x^2+2x-1)(x+2)}{x+2}$

pour $x \neq -2$ $= \frac{3x-2-(x^3+2x^2+2x^2+4x-x-2)}{x+2}$

$= \frac{-x^3-4x^2}{x+2} = \frac{-x^2(x+4)}{x+2}$

b)

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-4\,;-2[$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;-4]$ et sur $]-2\,;+\infty[$