Devoir n°11 - Suites - TSpé maths

2 mars 2023 - 1h

Seul l'exercice 1 est évalué !

Exercice 1 (10 pts) :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a) Calculez u_1 et v_1.

   b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, et en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.

   d) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

   On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

   a) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

   c) Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

   d) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

   e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
      r = (2+r)/(1+r)
      n = n+1
    return n
```

   (abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
   La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
   À quoi correspond-elle ?

3. **Bonus :** On souhaite démonter que, pour tout entier n, $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ (admis dans la question 2)

   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $v_n^2 - 2u_n^2 = (-1)^{n+1}$.

   b) En déduire le résultat cherché.

Exercice 2 (Métropole sept 2020) :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

La suite (v_n) est définie par :
$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. Vérifier que l'on a $v_2 = \dfrac{2}{3}$ puis calculer v_3.
2. On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Recopier et compléter sur la copie cet algorithme afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul définie par l'utilisateur.
   Aucune justification n'est attendue.

	Algorithme
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$U \leftarrow \dfrac{\ldots(\ldots+2)}{(\ldots+1)^2}$
4.	$V \leftarrow \ldots$
5.	Fin Pour

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.
4. a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   b) Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).
5. a) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
6. On considère la suite w_n définie par
   $w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n).$$

   Montrer que $w_7 = 2w_1$.