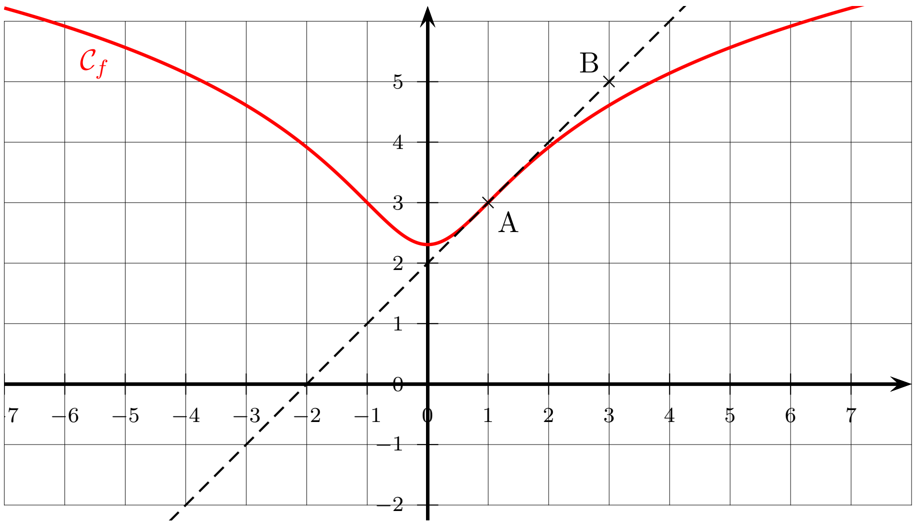
Devoir n°10 - Fonction Ln - TSpé maths

1 mars 2023 - 1h

Seul l'exercice 1 est évalué !

Exercice 1 (Asie mai 2022 J1 - 10 pts) :
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2 + 1\right) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C : On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 2 (Métropole sept 2022 J1 :

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
   b) Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
   a) Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.
   b) Si $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).