Correction du dev 10. TSpé

Ex 1 : Partie A

1) $f(1) = 3$ car $A(1;3) \in \mathcal{C}_f$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A, on lit $f'(1) = 1$ 1

2) $f(x) = \ln(ax^2+1) + b$ sur $\mathbb{R}$ $(a, b > 0)$

ⓐ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}}$ 0,5

ⓑ $f(1) = 3 \iff \ln(a+1) + b = 3$

$f'(1) = 1 \iff \dfrac{2a}{a+1} = 1 \iff 2a = a+1 \iff \boxed{a = 1}$ 1,25

alors $\ln(a+1) + b = 3 \iff \ln 2 + b = 3 \iff \boxed{b = 3 - \ln 2}$

Donc $f(x) = \ln(x^2+1) + 3 - \ln 2$

Partie B

1) $f(-x) = \ln((-x)^2+1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2+1) + 3 - \ln 2 = f(x)$

donc f est paire 0,5

2) Par symétrie, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$

$X = x^2+1$ $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

Par composition et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ 1

3) $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}}$ $x^2+1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x$.

0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3 - \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

0,75

4) D'après le tableau, l'équation $f(x) = k$ admet 2 solutions pour $k > 3 - \ln 2$ 0,5

5) $f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2+1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2$

$\iff \ln(x^2+1) = 2\ln 2 = \ln 4$

$\iff x^2 + 1 = 4$ $\boxed{S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}}$

$\iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$

1

Partie C

1) d'après le graphique, $\mathcal{C}_f$ admet deux points
0,25 d'inflexion d'abscisses 1 et -1

2) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

1 $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

3) $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(1-x^2)$
$2 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a = -1$
du signe de a
à l'extérieur des racines

1

0,5 $f''(x) \geq 0$ sur $[-1; 1]$
donc f convexe sur $[-1; 1]$