Devoir n°8 - Ln, Exp, Suites, primitives - TSpé maths

26 janvier 2023 - 2h

Exercice 1 (4 pts) : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction :

   a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

2. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}.$$

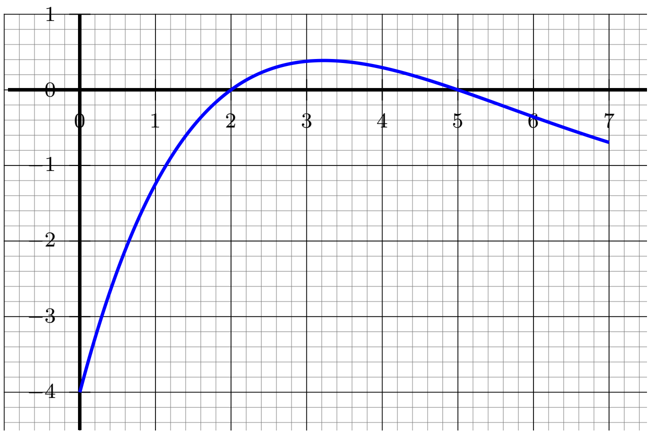
   La limite de la suite (a_n) est égale à :

   a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$

3. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   a. $K(x) = H(2x)$ **b.** $K(x) = 2H(2x)$ **c.** $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$ **d.** $K(x) = 2H(x)$

4. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.



   Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$	↗		↘

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↗	↘	↗	

d.

x	0	2	7
$f(x)$	↗		↘

Exercice 2 (7,5 pts) :

Partie A : Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

Partie B : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \ln(u_n^2 + 1) \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{, c'est-à-dire } u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
   b) Justifier que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.
2. On considère l'algorithme suivant :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
from math import*
n=0
u=1
while u>=0.01:
      n=n+1
      u=u-math.log(u*u+1)
print(u,n)
```

Expliquer le rôle du programme

Exercice 3 (8,5 pts) : On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Déterminer les limites de f, en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer f', la fonction dérivée de f, et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que

$$f''(x) = (8x - 4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   Étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$, et en déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.
5. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x}$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-2x}$ soit une primitive de la fonction g.
   b) En déduire une primitive F de f.