Devoir n°8 - Ln, Exp, Suites, primitives - TSpé maths

26 décembre 2023 - 2h

Exercice 1 (4 pts) : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction :

   a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

2. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}.$$

$$\frac{2^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \to -\infty}{2^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) \to 1}$$

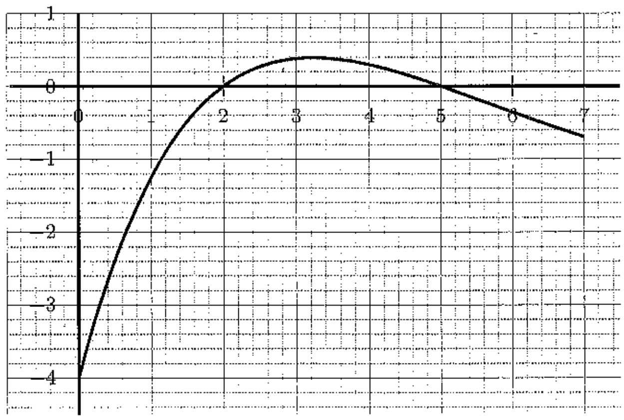
   La limite de la suite (a_n) est égale à :

   a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$

3. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   a. $K(x) = H(2x)$ **b.** $K(x) = 2H(2x)$ **c.** $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$ **d.** $K(x) = 2H(x)$

4. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.



   Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$	↗		↘

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↗	↘	↗	

d.

x	0	2	7
$f(x)$	↗		↘

Ex 2 : Ⓐ $f(x) = x - \ln(x^2+1)$ sur $[0;1]$ 1,75

1) $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 1

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$

$f(1) = 1 - \ln 2 \simeq 0,3$ 1

2) $f(x) = x \iff x - \ln(x^2+1) = x$
$\iff \ln(x^2+1) = 0$
$\iff x^2+1 = 1$
$\iff x^2 = 0$ $\quad S = \{0\}$ 1
$\iff x = 0$

Ⓑ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1) = f(u_n) \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) on veut montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

ⓐ initialisation : pour $n = 0$
$u_0 = 1$ $\quad u_1 = f(u_0) = 1 - \ln 2$ $(\simeq 0,3)$
on a $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$ vrai pour $n = 0$ 0,5

hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$
f strictement croissante sur $[0;1]$
donc $f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1)$ 1,5
c'est à dire $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1 - \ln 2$ or $1 - \ln 2 < 1$
Donc $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$
vrai pour $k+1$.

conclusion : on a montré par récurrence que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 0,25

ⓑ on a donc (u_n) décroissante et minorée par 0.
Par théorème (u_n) converge vers ℓ 0,5
(avec $0 \leq \ell \leq 1$)

$u_{n+1}=f(u_n)$ avec f continue sur $[0;1]$
(par composition et somme)
d'après le théorème du point fixe,
l vérifie $l=f(l)$ 1
D'après la question (A) 2) $l=0$

2) L'algorithme calcule et affiche le plus petit rang n ainsi que le terme u_n tel que $u_n<0{,}01$.

0,75

Ex 3 : $f(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3$ sur $\mathbb{R}$ /8,5

1) $f(x) = 2xe^{-2x} + e^{-2x} + 3 = \dfrac{2x}{e^{2x}} + \dfrac{1}{e^{2x}} + 3$

Par croissances comparées et composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^{2x}} = 0$

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$ 1,5

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

$X = 2x$ $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$

Par composition et quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{e^{2x}} = -\infty$

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

2) $f'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)(-2e^{-2x}) = \boxed{-4xe^{-2x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

$e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-4x)$ 1,5

3) • Sur $[0;+\infty[$, f strictement décroissante avec $f(0) = 4$ donc $f(x) > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution 0,5

• Sur $]-\infty;0]$, f continue car dérivable, f strictement croissante

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 4$ 1,5

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-\infty;0]$

• Au Total, une seule solution α sur $\mathbb{R}$ 0,25

D'après la calculatrice

$f(-0,8) > 0$; $f(-0,9) < 0$ donc $-0,9 < \alpha < -0,8$ ~~par excès~~ par

soit $\boxed{\alpha \simeq -0,8}$

0,5

4) $f''(x) = (8x-4)\,e^{-2x}$ d'après l'énoncé

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

0,25

Sur $[1/2 ; +\infty[$ $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe

5) $g(x) = (2x+1)\,e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

ⓐ $G(x) = (ax+b)\,e^{-2x}$ est une primitive de g

$\iff G'(x) = g(x)$

or $G'(x) = a\,e^{-2x} + (ax+b) \times (-2)\,e^{-2x}$

$= (-2ax + a - 2b)\,e^{-2x}$

1,25

Par identification des coefficients $\begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc $\boxed{G(x) = (-x-1)\,e^{-2x}}$

ⓑ $f(x) = g(x) + 3$

0,5

donc $\boxed{F(x) = (-x-1)\,e^{-2x} + 3x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$