Devoir n°7 - Fonction Ln - TSpé maths

21 décembre 2022 - 1h

Exercice 1 (Sujet Calédonie 27 oct 2022 - 10 pts) :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Déterminer f'.
   b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
   c) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$;
   en déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
2. a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Déterminer un encadrement de α au dixième.
   c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (Amérique du Nord 19 mai 2022 - Bonus) : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Chaque réponse est à justifer.*

Question 1 : Le réel a défini par $a = \ln(9) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \dfrac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3) + \dfrac{1}{2}$ **d.** $-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Question 2 : On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a. 3 est solution de (E).
b. $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E).
c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Question 3 : La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.
b. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
c. $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est différent de 0.
d. La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 3 (Métropole sept 2022 - Bonus) :
Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.