Correction du dev n°6 - ln - TSpé

Ex1 : $f(x) = x\ln(x) - x - 2$ sur $]0;+\infty[$ **/10**

1) a) $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$ 0,75

b) $T : y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$

$f'(e) = \ln(e) = 1$ et $f(e) = e\ln(e) - e - 2 = e - e - 2 = -2$

Donc $y = 1 \times (x - e) - 2 \Leftrightarrow y = x - e - 2$ 1

c) $f''(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

donc f est convexe

alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T 1

2) a) par croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} (-x - 2) = -2$

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2}$ 1

$f(x) = x\ln(x) - x - 2 = x(\ln(x) - 1) - 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) - 1 = +\infty$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ 1

b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

1

3) a) • sur $]0;1]$, f est strictement décroissante avec $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2$

donc $f(x) < 0$

l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution 0,75

• sur $[1;+\infty[$

f continue car dérivable

f strictement croissante

$f(1) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1;+\infty[$ 1,5

• Au Total, une seule solution sur $]0;+\infty[$ 0,5

ⓑ d'après la calculatrice

$\left.\begin{array}{l} f(4,3)<0 \\ f(4,4)>0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{4,3<\alpha<4,4}$ 0,5

ⓒ on a donc

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0,5

4) le programme calcule une valeur approchée de α par excès, soit 4,32 $\begin{array}{l} f(4,31)<0 \\ f(4,32)>0 \end{array}$ 0,5

Ex2 : Q1 $a = \ln 9 + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

$= \ln(9) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(9)$

$= -\ln(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}\ln(3)$ ⓓ

Q2 $(E) : \ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7$ $\left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x-10>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>10$

on travaille sur $]10;+\infty[$

$(E) \Leftrightarrow \ln(x(x-10)) = \ln(21)$

$\Leftrightarrow x(x-10) = 21$ $\Delta = 184 = 4\times 46$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 21 = 0$ $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$

$x_1 = \frac{10+2\sqrt{46}}{2} = 5+\sqrt{46}$ et $x_2 = 5-\sqrt{46}$ ne convient pas

$\simeq 11,8$ $\simeq -1,8$

$S = \{5+\sqrt{46}\}$ ⓒ

Q3 $f(x) = x^2(-1+\ln x)$ sur $]0;+\infty[$

$\ast$ $f'(x) = 2x(-1+\ln x) + x^2\times\frac{1}{x} = -2x + 2x\ln x + x$

$= 2x\ln x - x = x(2\ln x - 1)$ du signe de $2\ln x - 1$

$\ast$ $f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}(2\ln\sqrt{e} - 1) = \sqrt{e}(2\times\frac{1}{2}\ln e - 1) = \sqrt{e}(1-1) = 0$

$f(\sqrt{e}) = e(-1+\ln\sqrt{e}) = e(-1+\frac{1}{2}\ln e) = e(-1+\frac{1}{2}) = \frac{-1}{2}e$

donc $T : y = f'(\sqrt{e})(x-e) + f(e) \Leftrightarrow y = f(e) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}e$ ⓓ

Ex3 : $f_k(x) = kx - x\ln x$ sur $]0;+\infty[$ $(k \in \mathbb{R})$

1) $f'_k(x) = k - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = k - (\ln x + 1)$.
$= (k-1) - \ln x$

$f'_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow k-1 \geq \ln x$
$\Leftrightarrow e^{k-1} \geq x$ car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f'_k(x)$	‖	$+$	0	$-$	

f_k est strictement croissante sur $]0;e^{k-1}]$
puis décroissante sur $[e^{k-1};+\infty[$
donc f_k admet un maximum en $x_k = e^{k-1}$

2) $f_k(x_k) = k \times e^{k-1} - e^{k-1}\ln(e^{k-1})$
$= ke^{k-1} - e^{k-1} \times (k-1)$
$= \cancel{ke^{k-1}} - \cancel{ke^{k-1}} + e^{k-1} = e^{k-1}$

donc $\boxed{y_k = x_k}$