Devoir n$^{\text{o}}$6 - Fonction Exponentielle - TSpé maths

7 décembre 2022 - 1h

Exercice 1 (Sujet Calédonie 26 oct 2022 - 10 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^x$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Calculer u_1 puis u_2.
   On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.
   b) On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

   On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n) :
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

   Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. a) Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2\mathrm{e}^x(x+3)$.
   b) Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous (variations, limites et extremum) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27\mathrm{e}^{-3}$	↗	$+\infty$

   c) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

   d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   e) On note ℓ la limite de la suite (u_n). On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer ℓ.
   (pour cela, on admettra que l'équation $x^2\mathrm{e}^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\dfrac{1}{2}$).

Exercice 2 (Amérique du Nord 18 mai 2022 - Bonus : Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.
   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$.
   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = 0$.

6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.