Correction du dev 6 - Exp Bac

Ex 1 : $\boxed{f(x) = x^3 e^x}$ sur $\mathbb{R}$

1) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $u_1 = f(u_0) = f(-1) = -e^{-1} = \frac{-1}{e} \simeq -0{,}36$ 0,5

$u_2 = f(u_1) = \left(\frac{-1}{e}\right)^3 e^{-1/e} = -e^{-3-\frac{1}{e}}$ 0,5

$\simeq -0{,}034$ 0,5

ⓑ le programme renvoie $u_2 \simeq -0{,}034$ 0,5

2) ⓐ f est dérivable comme produit

$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$ 1

ⓑ $x^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(3 + x)$ 1

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-27e^{-3}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

0,5

$f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27e^{-3}$

en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 0,5

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

en $-\infty$, par croissances comparées $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ 0,5

« e^x l'emporte sur x^3 »

ⓒ on veut montrer que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

2,5

initialisation : pour $n = 0$

$u_0 = -1$ et $u_1 = \frac{-1}{e} \simeq -0{,}368$ vrai pour $n = 0$

on a bien $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$

hérédité : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$-1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 0$ f est strictement croissante sur $[-1 ; 0]$

$\Leftrightarrow f(-1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(0)$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{e} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 0$ or $\frac{-1}{e} \geqslant -1$

Donc $-1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 0$ vrai au rang $k+1$

conclusion : c'est vrai pour $n=0$ et c'est héréditaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$

(d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 0

Par théorème, (u_n) converge vers ℓ $(-1 \leq \ell \leq 0)$

(e) on rappelle que $f(\ell) = \ell$

$f(x) = x \iff x^3 e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 e^x - 1 = 0$

or l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ strictement supérieure à $1/2$

et $-1 \leq \ell \leq 0$

Donc $\boxed{\ell = 0}$

Ex 2 : 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $1 - \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x - (1-e^x)}{1+e^x} = \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x \times 2}{e^x(e^{-x}+1)} = \dfrac{2}{e^{-x}+1}$

VRAI

2) $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{2}$

$\iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1$

$S = \{0\}$ VRAI $\quad \iff x = 0$

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = x e^{-x}(2-x)$

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$

et l'équation d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a s'écrit

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

on cherche donc $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 e^{-a} = 0 \\ a e^{-a}(2-a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ a(2-a) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \text{ ou } a = 2 \end{cases} \iff a = 0$

vrai L'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}_f$ seulement en $O(0;0)$

4) $h(x) = e^x(1-x^2)$ sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = e^x(1-x^2) + e^x(-2x) = e^x(-x^2-2x+1)$

$h''(x) = e^x(-x^2-2x+1) + e^x(-2x-2)$

$= e^x(-x^2-4x-1)$

$e^x > 0$ donc $h''(x)$ est du signe de $P(x) = -x^2-4x-1$

$\Delta = 12$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$; $x_1 = -2-\sqrt{3}$; $x_2 = -2+\sqrt{3}$

on a donc

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a = 1$
$a > 0$

$h''(-2-\sqrt{3}) = h''(-2+\sqrt{3}) = 0$ en changeant de signe donc la courbe de h admet 2 points d'inflexion. Faux.

5) $\dfrac{e^x}{e^x+x} = \dfrac{e^x \times 1}{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{e^x}}$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+x} = 1$

Faux

6) $(1+e^{2x}) - 2e^x = e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x-1)^2$

or $(e^x-1)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $1+e^{2x} \geq 2e^x$ sur $\mathbb{R}$ Vrai