Devoir n°5 - Continuité, dérivabilité et Convexité - TSpé maths

24 novembre 2022 - 2h

Exercice 1 (4 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \\ -x^3+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   (aide : on donne $1-x^3 = (1-x)(1-x+x^2)$)

Exercice 2 (6,5 pts) : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
4. Justifier la convergence de la suite (u_n), puis déterminer sa limite.

Exercice 3 (Amérique du Nord mai 2022 - 9,5 pts) :

Partie A : Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

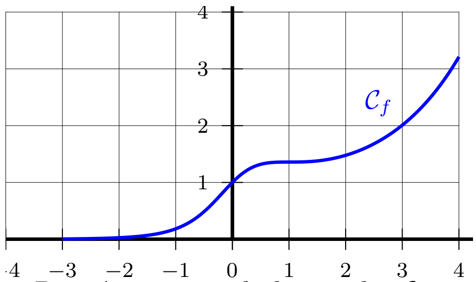
1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer un encadrement du réel α au centième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

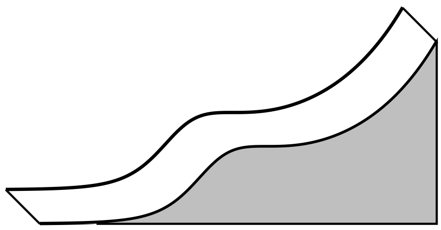
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
   b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel $x \in [-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   Etudier la convexité de la fonction f.
   c) Répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.
3. (Bonus) Montrer que la fonction f'' a pour expression pour tout réel $x \in [-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

Exercice 4 (Bonus) : Etude d'une famille de fonctions

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

Etudier suivant la parité de n

1. la limite de f_n en $-\infty$
2. la limite de f_n en $+\infty$
3. les variations de f_n sur $\mathbb{R}$
4. le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 1$