Correction du dev 5 - TSpé

Ex1 : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^3+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ /4

1). • f est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$
comme fonctions polynômes.

• en $x=1$ $f(1) = 1^2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} -x^3+2 = 1$ par somme on a donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$

alors f est continue en 1 (par définition)

• f est alors continue sur $\mathbb{R}$. 1,5

2) • f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ comme polynômes

• en $x=1$ "à gauche de 1" $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(1) = 2$

ou $x \neq 1$, $x < 1$ $\tau_1 = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \tau_1 = 1+1 = 2$

"à droite de 1" $\tau_1 = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(-x^3+2)-1}{x-1} = \dfrac{-x^3+1}{x-1}$

or $-x^3+1 = (1-x)(1+x+x^2)$

donc $\tau_1 = \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{-(1-x)} = -1-x-x^2$ $x \neq 1$, $x > 1$ 2,5

alors $\lim\limits_{x \to 1^+} \tau_1 = -3$

$-3 \neq 2$ donc f n'est pas dérivable en 1

• alors f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+3} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x+3}$ sur $[0;+\infty[$

/0,5

1) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ $\qquad$ $2\sqrt{x+3} > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

1

2) $f(x) = x \iff \sqrt{x+3} = x$ avec $x \geqslant 0$.

$\iff x+3 = x^2$ $\qquad$ $\Delta = 1 - 4\times(-3) = 13$

$\iff x^2 - x - 3 = 0$ $\qquad$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}3 \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}3 < 0 \end{cases}$

1

donc $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

3) on veut montrer que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ pour $n \in \mathbb{N}$

0,5

• Initialisation : pour $n = 0$

$u_0 = 1$

$u_1 = \sqrt{u_0+3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

on a ~~bien~~ $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$ vrai pour $n = 0$

0,5

• Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$ or f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc $f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(3)$

$f(1) = 2$ et $f(3) = \sqrt{6}$

$2 > 1$ et $\sqrt{6} < 3$

1,5

alors $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$ Vrai au rang $k+1$

• Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

0,25

4) on a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par 3

Par théorème (u_n) converge vers ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant 3)$

0,75

$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } l \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec f continue sur $[0;+\infty[$
comme composée de
fonctions continues

d'après le théorème du point fixe
l vérifie $l = f(l)$
d'après la question 2) $l = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

1,25

Ex3 : Partie A : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ sur $[-3;4]$

1) $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = 36 - 60 = -24$

1 $\Delta < 0$ donc $p'(x) > 0$ du signe de $a = 3$

alors p est strictement croissante sur $[-3;4]$

2) $\begin{cases} p \text{ est continue sur } [-3;4] \text{ (polynôme)} \\ p \text{ strictement croissante} \\ p(-3) = -68 \text{ et } p(4) = 37 \end{cases}$ $\quad -68 < 0 < 37$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet

2 une seule solution α sur $[-3;4]$

3) d'après la calculatrice.

0,5 $\left.\begin{array}{l} p(-0,18) < 0 \\ p(-0,17) > 0 \end{array}\right\}$ donc $-0,18 < \alpha < -0,17$

4) d'après les questions précédents

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

Partie B : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ sur $[-3;4]$

1) ⓐ f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$$

1

$$\Longleftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}}$$

ⓑ $f'(1) = 0$ coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 1

0,75 donc C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

2) ⓐ d'après le graphique, il y a 2 points d'inflexion d'abscisse -0,5 et 1,5 environ puisque f est convexe, puis concave, et enfin convexe, donc le ~~toboggan~~ semble assurer de bonnes sensations.

0,75

ⓑ $f''(x) = \dfrac{P(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ sur $[-3;4]$

sur $[-3;4]$, $e^x > 0$, $(1+x^2)^3 > 0$
donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$

x	-3		α		1		4
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1,5

2

sur $[-3;\alpha]$ et sur $[1;4]$, $f''(x) > 0$ donc f est convexe
sur $]\alpha;1[$ $f''(x) < 0$ donc f est concave

ⓒ en $x = \alpha$ et en $x = 1$, f'' change de signe
donc $\mathcal{C}_f$ admet bien 2 points d'inflexion
et « le toboggan assure de bonnes sensations ».

1,5

Ex3 (Bonus)

sur $[-3;4]$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$u(x) = e^x(x^2-2x+1)$

$u'(x) = e^x(x^2-2x+1) + e^x(2x-2)$

$= e^x(x^2-1)$

$v(x) = (1+x^2)^2$

$v'(x) = 2(1+x^2)\times 2x$

$= 4x(1+x^2)$

Donc
$$f''(x) = \frac{e^x(x^2-1)(1+x^2)^2 - e^x(x-1)^2 \times 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{e^x(x^2-1)(1+x^2) - e^x(x-1)^2 \times 4x}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{e^x(x^4-1) - 4x(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{e^x(x^4-1-4x(x^2-2x+1))}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{e^x(x^4-4x^3+8x^2-4x-1)}{(1+x^2)^3}$$

or $p(x)(x-1) = (x^3-3x^2+5x+1)(x-1)$

$= x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 + 5x^2 - 5x + x - 1$

$= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x - 1$

Donc
$$\boxed{f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}}$$

Ex 4 (Bonus) $f_m(x) = x^m(1-x)$ sur $\mathbb{R}$

$m \in \mathbb{N}^*$

1) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty \\ m \text{ pair } \lim\limits_{x \to -\infty} x^m = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} x^m = -\infty \quad m \text{ impair} \end{cases}$

Par produit $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = +\infty \quad \text{pour } m \text{ pair} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = -\infty \quad \text{pour } m \text{ impair} \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^m = +\infty$

Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty$

3) $f'_m(x) = m x^{m-1}(1-x) + x^m \times (-1)$

$= m x^{m-1} - m x^m - x^m$

$= m x^{m-1} - x^m(1+m)$

$= x^{m-1}(m - (1+m)x)$

- $f'_m(x) = 0 \iff x^{m-1} = 0$ ou $m = (1+m)x$

$m \geq 2$ $\iff x = 0$ ou $x = \dfrac{m}{1+m}$

- $\boxed{\text{pour } m = 1}$ $f'_1(x) = x^0(1 - 2x) = 1 - 2x$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	0	$-$

f_1 est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ puis décroissante sur $[1/2 ; +\infty[$

pour $m \geq 2$

- Si m pair alors $m-1$ impair

x	$-\infty$		0		$m/_{1+m}$		$+\infty$
x^{m-1}		$-$	0	$+$	|	$+$	
$m-(1+m)x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f_m strictement décroissante sur $]-\infty;0[\cup]\frac{m}{1+m};+\infty[$
f_m croissante sur $[0;\frac{m}{1+m}]$

- Si m impair alors $m-1$ pair

x	$-\infty$		0		$m/_{1+m}$		$+\infty$
x^{m-1}		$+$	0	$+$	|	$+$	
$m-(1+m)x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'_m(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

f_m strictement croissante sur $]-\infty;\frac{m}{1+m}[$
et décroissante sur $[\frac{m}{1+m};+\infty[$

4) $\boxed{m=1}$

$f_1(x)=x(1-x)$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$1/4$	↘	$-\infty$

$f_1(x)=1$ n'a pas de solution.

$\boxed{m \text{ pair } (m\geq 2)}$

x	$-\infty$	α		0		$\frac{m}{1+m}$		$+\infty$
$f_m(x)$	$+\infty$	1 ↘	↘	0	↗	$f(\frac{m}{1+m})$	↘	$-\infty$

$\boxed{m \text{ impair } (m\geq 2)}$

x	$-\infty$		$\frac{m}{1+m}$		$+\infty$
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{m}{1+m})$	↘	$-\infty$

<u>or</u> $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1}$$

$1 - \frac{1}{n+1} < 1$ donc $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$.

$n \geq 2 \Leftrightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$

$x \mapsto 1/x$ st ↘ sur $]0;+\infty[$

<u>donc</u> $\boxed{f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) < 1}$

<u>pour n pair</u> $f_n(x) = 1$ admet <u>une seule solution</u>

<u>pour n impair</u> $f_n(x) = 1$ admet <u>aucune solution</u>