Correction du devoir n°4 - TSpé

Ex1 : $f_1(x) = \dfrac{2+x-x^2}{3+x^2}$ (en $-\infty$)

$$f_1(x) = \frac{x^2\left(2/x^2 + 1/x - 1\right)}{x^2\left(3/x^2 + 1\right)} = \frac{2/x^2 + 1/x - 1}{3/x^2 + 1}$$ pour $x \neq 0$ 1,5

Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2} + 1 = 1$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1}$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $-\infty$ 2,5

$f_2(x) = \dfrac{5x+2}{2x^2-x-1}$ (en 1) $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$ $a=2$ $a>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to 1} (5x+2) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (2x^2 - x - 1) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 - x - 1) = 0^-$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f_2(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f_2(x) = -\infty}$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_2$ 3

$f_3(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^3$ (en $+\infty$)

Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = -2$

On pose $X = \dfrac{1}{x} - 2$ $\lim\limits_{X \to -2} X^3 = -8$

Par composition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = -8}$

La droite d'équation $y = -8$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_3$ en $+\infty$ 2

$f_4(x) = \dfrac{-3x^2+5x+2}{x-2}$ (en 2) 2 est racine du numérateur et du dénominateur

$$f_4(x) = \frac{(x-2)(-3x-1)}{(x-2)\times 1} = -3x - 1$$ pour $x \neq 2$

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f_4(x) = \lim_{x \to 2} (-3x-1) = -7}$$

1,5

$f_5(x) = \dfrac{1+3\sin x}{x^2}$ (en $+\infty$)

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3$

$\Leftrightarrow -2 \leq 1+3\sin x \leq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{x^2} \leq f_5(x) \leq \dfrac{4}{x^2}$

$x^2 > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$

D'après le théorème des gendarmes

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_5$ en $+\infty$.

2,25

$f_6(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{10-x}$ (en $-\infty$)

$f_6(x) = \left(\sqrt{3-x} - \sqrt{10-x}\right) \times \dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{10-x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{10-x}} = \dfrac{(3-x)-(10-x)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{10-x}}$

Donc $f_6(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{3-x}+\sqrt{10-x}}$

Par composition et somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-x}+\sqrt{10-x} = +\infty$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = 0}$ L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_6$ en $-\infty$)

2

$f_7(x) = \cos x - \sqrt{x}$ (en $+\infty$)

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{x} \leq f_7(x) \leq 1-\sqrt{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\sqrt{x}) = -\infty \\ f_7(x) \leq 1-\sqrt{x}\end{array}\right\}$

Par comparaison

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = -\infty}$

1,375

Ex 2 . $\boxed{f(x) = \dfrac{x-2}{2x+8}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

1) f est une fonction rationnelle

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}}$ 15

de même $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}}$

1,5 Donc $D_1 : y = 1/2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to -4} (x-2) = -6$

$\lim\limits_{x \to -4^+} (2x+8) = 0^+$

1,5 $\lim\limits_{x \to -4^-} (2x+8) = 0^-$

Par quotient

$\boxed{\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = +\infty}$

Donc $D_2 : x = -4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

2) $f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x-2}{2x+8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{(x-2)-(x+4)}{2x+8} = \dfrac{-6}{2x+8}$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
-6	$-$	||	$-$
$2x+8$	$-$	||	$+$
$f(x) - 1/2$	$+$	||	$-$

pour $x < -4$, $f(x) - 1/2 > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D_1

pour $x > -4$, $f(x) - 1/2 < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de D_2.

2/

Ex 3 (Bonus) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{2}{x^2+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) • f est continue sur $]-\infty ; -1[$, c'est un polynôme
• f est continue sur $]-1 ; +\infty[$, fonction rationnelle
en -1

$f(-1) = (-1)^2 + 3\times(-1) + 3 = 1$

or $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \left(\dfrac{2}{1+1}\right) = 1 = f(-1)$

Par définition, f est continue en -1

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

2) • f est dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$
comme fonctions usuelles dérivables.

• en -1
pour $x \leq -1$ $f(x) = x^2+3x+3$ $f'(x) = 2x+3$
alors $f'(-1) = 1$ dérivée « à gauche »

pour $x > -1$ $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

$T_x = \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{2/x^2+1 \; - 1}{x+1} = \dfrac{\frac{2-(x^2+1)}{x^2+1}}{x+1}$

$\Rightarrow T_x = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)(x+1)} = \dfrac{\cancel{(1+x)}(1-x)}{(x^2+1)\cancel{(x+1)}} = \dfrac{1-x}{x^2+1}$

Par quotient $\lim\limits_{x\to -1^+} T_x = 1$ « nombre dérivé de f en (-1) à droite »

Puisque les 2 valeurs sont égales, f est dérivable en (-1) et $f'(-1) = 1$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$