Devoir n°3 - Suites et Fonctions - TSpé maths

13 octobre 2022 - 2h

Exercice 1 (10 pts) : Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse
Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de $0,25$ mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.
   a) Compléter le script écrit en langage Python ci-contre de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

   b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
   c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse
Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de $0,5$ mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(t) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t},$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?
2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.
3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

Exercice 2 (4 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = \dfrac{5x+3}{2x-1}$; en $\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{\cos x}{2x}$; en $-\infty$

Exercice 3 (8 pts) :

Partie A : Soit $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer alors les réels a, b et c réels, tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$; que peut-on en déduire graphiquement ?
2. Calculer f', la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dressser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe C_f au point B d'abscisse -1 pour équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.
   b) Etudier la position relative de la droite $\mathcal{T}_B$ et de la courbe C_f, en utilisant la Partie A.

Exercice 4 (Bonus) : Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit une suite (v_n).
   Affirmation A : Si pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a $-1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$,
   alors la suite (v_n) converge.

2. **Affirmation B :** Pour tout entier naturel n non nul, on a $(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3) = n(4n+7)$.

3. Soit (w_n) une suite convergente.
   Affirmation C : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.