Correction du devoir n°3 - TSpé

Ex 1 : (A) 1) $u_0 = 1$ 1 mg de médicament au départ

$1 \times 0{,}9 + 0{,}25 = 1{,}15$ Au bout de 30 min, le patient a 1,15 mg de médicament dans le sang

0,5

2) $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 0{,}25$ $(n \in \mathbb{N})$

toutes les 30 min, 10% sont éliminés

ce qui revient à $\times\left(1 - \frac{10}{100}\right)$ soit $\times 0{,}9$

et 0,25 mg sont ré-injectés. $+0{,}25$

0,5

3) (a) on veut montrer que $u_n \leq u_{n+1} < 5$ pour $n \in \mathbb{N}$

• initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 1$ $u_1 = 1{,}15$

on a bien $u_0 \leq u_1 < 5$ vrai pour $n = 0$

0,5

• hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \leq u_{k+1} < 5$

alors $0{,}9\,u_k \leq 0{,}9\,u_{k+1} < 4{,}5$

1,5

$\Rightarrow 0{,}9\,u_k + 0{,}25 \leq 0{,}9\,u_{k+1} < 4{,}75$ or $4{,}75 < 5$

$\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} < 5$ vrai au rang $(k+1)$

• conclusion : on a montré par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} < 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,25

(b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 5

Par théorème (u_n) converge.

0,5

4) (a)

```
def efficace():
    u=1
    n=0
    while u < 1,8:
        u=0,9u+0,25
        n=n+1
    return n
```

0,75

(b) d'après la calculatrice

$\begin{cases} u_7 < 1{,}8 \\ u_8 > 1{,}8 \end{cases}$

donc le script renvoie $n = 8$

Le médicament commence à être efficace au bout de 8×30 min donc au bout de 4 heures

5) $v_n = 2,5 - u_n \quad (n \in \mathbb{N}) \iff u_n = 2,5 - v_n$

ⓐ $v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1}$

$= 2,5 - (0,9\, u_n + 0,25)$

$= 2,25 - 0,9\, u_n$

$n \in \mathbb{N}$ $= 2,25 - 0,9(2,5 - v_n)$

1 $= 2,25 - 2,25 + 0,9\, v_n$

$= 0,9\, v_n$

$v_0 = 2,5 - u_0 = 1,5$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,9 de terme initial $v_0 = 1,5$

0,5

0,5 ⓑ alors $v_n = v_0 \times q^n = 1,5 \times 0,9^n$ et $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓒ $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2,5$

1 (u_n) est croissante

$u_0 = 1$

Donc $u_n \leq 2,5 < 3$

Le ~~traitement~~ ne présente aucun risque pour le patient.

Ⓑ $f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$ $t \in [0 ; +\infty[$ t en heure

1) $3\text{h}45 \text{ min} = \left(3 + \frac{3}{4}\right) h = \frac{15}{4} h$

$f\left(\frac{15}{4}\right) = 2,5 - 1,5e^{-0,2 \times \frac{15}{4}} \simeq 1,79$ $f\left(\frac{15}{4}\right) < 1,8$

0,5 Le médicament n'est pas vraiment efficace au bout de 3h45 min.

plutôt résolution avec ln

2) $f(3,81) < 1,8$

$f(3,82) > 1,8$

D'après la calculatrice donc le médicament est vraiment efficace au bout de 3h49 min 1

$(0,82 \times 60 = 49,2)$

3) Le résultat est inférieur à celui du 1er modèle.

0,5

/10,5

Ex 2 : $f_1(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$ (en $1/2$)

/4

$\lim\limits_{x \to 1/2} (5x+3) = \frac{11}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} (2x-1) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1/2^-} (2x-1) = 0^-$

Par quotient

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1/2^-} f_1(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 1/2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_1$

/2

$f_2(x) = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}}$ (en $+\infty$)

$\frac{4x^2}{x^2+1} = \frac{x^2 \times 4}{x^2(1+1/x^2)} = \frac{4}{1+1/x^2}$ pour $x \neq 0$

Par Somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

Par Quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2+1} = 4$

On pose $X = \frac{4x^2}{x^2+1}$ $\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$

Par composition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 2}$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_2$ en $+\infty$

$f_3(x) = \frac{\cos x}{2x}$ (en $-\infty$)

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $\frac{-1}{2x} \geq \frac{\cos x}{2x} \geq \frac{1}{2x}$ pour $x < 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{2x}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{2x} = 0 \end{cases}$

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0}$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_3$ en $(-\infty)$

/2

Ex3 : (A) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$ 18

1) $P(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc 1 est racine de P 0,25

2) alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ / $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$
$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Par identification des coefficients

$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 1 - 2 = -1 \text{ vrai} \\ c = 1 \end{cases}$ on a donc $P(x) = (x-1)(x^2+2x+1)$
$= (x-1)(x+1)^2$

1,5

(B) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

1) $x^2 - x + 1 = x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

Par produit et quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ 1,25

de même $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$ 0,25

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$. 0,5

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables car $x^2 - x + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

$f = \frac{1}{v}$ $f' = \frac{-v'}{v^2}$ $\boxed{f'(x)} = \dfrac{-(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \boxed{\dfrac{1-2x}{(x^2-x+1)^2}}$ 1

$(x^2 - x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - 2x)$ 0,25

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$4/3$	↘	0

$f(1/2) = \dfrac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$

1

3) ⓐ $T_B : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B(-1\,;\frac{1}{3})$

$f(-1) = \frac{1}{3}$ et $f'(-1) = \frac{1}{3}$

donc $y = \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{3} \iff \boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}$ 0,5

ⓑ $f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{x+2}{3}$

$D(x) = x^2 - x + 1$

$\Delta = -3 \quad \Delta < 0$

$D(x) > 0$ du signe de $a = 1$ 0,5

$$= \frac{3 - (x+2)(x^2-x+1)}{3(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{3 - (x^3 - x^2 + x + 2x^2 - 2x + 2)}{3(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{-x^3 - x^2 + x + 1}{3(x^2-x+1)} = \frac{-P(x)}{3(x^2-x+1)}$$

1,5

$$= \frac{-(x+1)^2(x-1)}{3(x^2-x+1)} = \boxed{\frac{(1-x)(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}}$$

du signe de $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$		$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty\,; 1]$ $f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \geq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_B 0,5

sur $[1\,; +\infty[$ $f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \leq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T_B.

Ex 4 (Bonus) : 1) Soit $v_n = \cos(n)$ $(n \in \mathbb{N})$

on a $-1 \leq v_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $-\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

or (v_n) ne converge pas Faux

2) $\underbrace{(8\times1+3)}^{u_1} + (8\times2+3) + \dots + \underbrace{(8\times n+3)}^{u_n} = n(4n+7)$

On pose $u_n = 8n+3$ suite arithmétique

de raison 8 de 1er Terme $u_0 = 3$

On a donc $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(u_1+u_n)\times n}{2}$

$= \frac{(11+8n+3)\times n}{2} = \frac{(14+8n)\times n}{2} = (7+4n)\times n$

Vrai

3) Soit $w_n = \frac{1}{n}$ $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ Faux

la limite est nulle et non strictement positive