Devoir nº2 - Suites - TSpé maths

29 septembre 2022 - 55 min

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

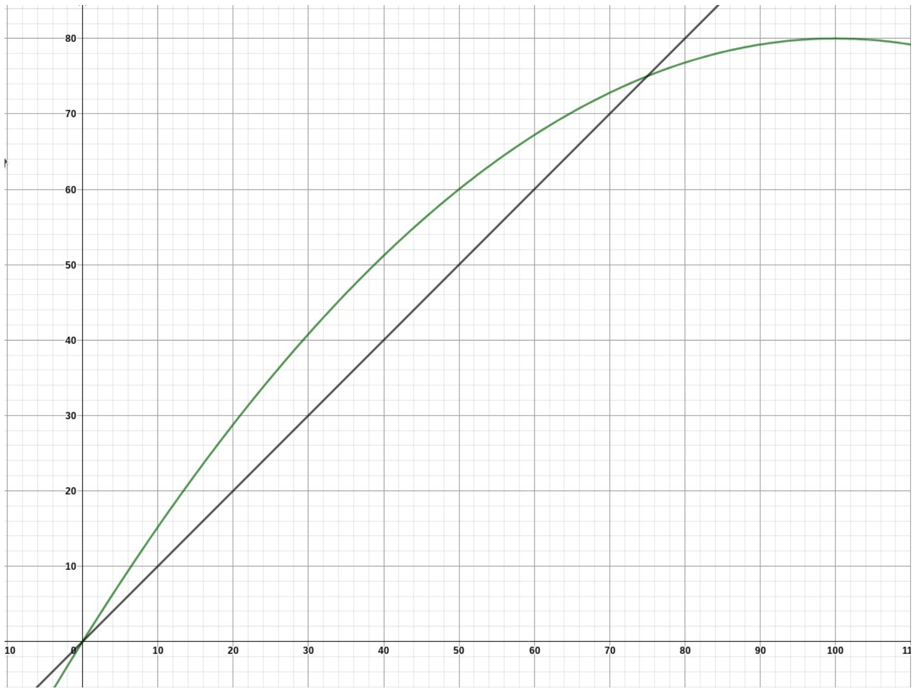
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n\left(200-u_n\right) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x)=0,008x(200-x)$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

2. Sur le graphique ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   En déduire une conjecture sur la monotonie de (u_n) et sur son éventuelle limite.



3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x)=x$.

4. a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $l=f(l)$: déterminer ℓ.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n = n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur.
Expliquer pourquoi à l'aide de la question 4.