15

Correction du devoir n°2 - Suites - Tspé maths

$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0{,}008\, u_n(200 - u_n) \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = 0{,}008\,x(200 - x)$ sur $[0;100]$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$

1) $u_1 = f(u_0) = f(40) = 0{,}008 \times 40 \times (200 - 40) = 51{,}2$ 1

On estime que la colonie aura environ 51 oiseaux en 2022.

2) D'après le graphique, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et converge vers 75

1,5

3) $f(x) = x \iff 0{,}008\,x(200 - x) = x$

$\iff -0{,}008x^2 + 1{,}6x - x = 0$ Sur $[0;100]$

$\iff -0{,}008x^2 + 0{,}6x = 0$ $S = \{0;75\}$

$\iff x(-0{,}008x + 0{,}6) = 0$

2,5 $\iff x = 0$ ou $-0{,}008x + 0{,}6 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = \dfrac{0{,}6}{0{,}008} = \dfrac{600}{8} = 75$

4) $f(x) = -0{,}008x^2 + 1{,}6x$

a) $f'(x) = -0{,}016x + 1{,}6 = 0{,}016(-x + 100)$

1,5 Pour $x \in [0;100]$, $-x + 100 \geq 0$ donc

x	0		100
$f(x)$	0	$\nearrow$	80

b) On veut montrer que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

<u>initialisation</u> : pour $n = 0$ $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$

1 on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$ Vrai pour $n = 0$

<u>hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 100$

or f est croissante sur $[0;100]$

3 donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(100)$

soit $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 80$ et $80 \leq 100$

On a bien $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 100$ Vrai au rang $k+1$

<u>Conclusion</u> : on a montré par récurrence que

0,5 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 100.

1 Par théorème (u_n) converge vers ℓ (avec $0 \leq \ell \leq 100$)

d) on admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$

D'après la question 3, $\ell = 0$ ou $\ell = 75$

or $u_0 = 40$ et (u_n) est croissante donc $\ell \geq 40$.

1 Ainsi $\ell = 75$

0,5 À long terme, la population d'oiseaux tendra vers 75

5) on cherche le plus petit rang tel que $u_n \geqslant 100$
or d'après la question 4, (u_n) est croissante et majorée par 100, de plus elle converge vers 75
Donc la boucle « while $u < p$: » va tourner à l'infini
1,5 puisque la condition est toujours vérifiée