Devoir n°1 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

19 septembre 2022 - 30 min

**Exercice 1 (4 pts)** : Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = (4x^2-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = (x^3-3x^2+1)\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3(x) = -2x^2\sqrt{5x}$ sur $]0;+\infty[$

$f_4(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x-2}{2\mathrm{e}^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 2 (6 pts)** : Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

**Ex 1** : $f_1'(x) = 3(4x^2-1)^2 \times 8x = \boxed{24x(4x^2-1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

$(u^3)' = 3u^2 \times u'$

$f_2'(x) = (3x^2-6x)e^{-2x} + (x^3-3x^2+1)\times(-2e^{-2x})$

$(uv)' = u'v+uv'$

$= e^{-2x}(3x^2-6x-2x^3+6x^2-2)$

$= \boxed{e^{-2x}(-2x^3+9x^2-6x-2)}$ sur $\mathbb{R}$

$x>0$ $\quad f_3'(x) = -4x\sqrt{5x} + (-2x^2)\times\dfrac{5}{2\sqrt{5x}} = -4x\sqrt{5x} - \dfrac{5x^2}{\sqrt{5x}}$

$= \dfrac{-4x\times5x-5x^2}{\sqrt{5x}} = \dfrac{-25x^2}{\sqrt{5x}}$

sur $\mathbb{R}$ $\quad f_4'(x) = \dfrac{3e^x(2e^x+1)-(3e^x-2)\times2e^x}{(2e^x+1)^2} = \dfrac{7e^x}{(2e^x+1)^2}$

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \boxed{u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On veut montrer que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$

$u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{0+1} = 0$ Vrai pour $n = 0$

- hérédité : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = \dfrac{k}{k+1}$

on veut montrer que $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k} \overset{H.R}{=} \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$ Vrai au rang $(k+1)$

- Conclusion : Par principe de récurrence, on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$