Correction Sujet Bac - Suites

$u_0 = 16$ $\quad$ $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ $\quad$ /12

$v_0 = 5$

1) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3u_0 + 2v_0}{5} = \dfrac{48+10}{5} = \dfrac{58}{5} = 11,6 \\ v_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{16+5}{2} = \dfrac{21}{2} = 10,5 \end{cases}$ $\quad$ 0,5 $\quad$ 0,5

2) $w_n = u_n - v_n \quad (n \in \mathbb{N})$

a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$= \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$= \dfrac{2(3u_n + 2v_n) - 5(u_n + v_n)}{10}$

$= \dfrac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \dfrac{u_n - v_n}{10}$

$= \dfrac{w_n}{10} = 0,1\, w_n$ $\quad$ 1,5

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $0,1$ de ~~1er terme~~ $w_0 = 11$ $\quad$ 0,5

alors $w_n = w_0 \times q^n = 11 \times 0,1^n \quad (n \in \mathbb{N})$ $\quad$ 0,5

b) $11 > 0$ et $0,1^n > 0$ donc $w_n > 0$ par produit $\quad$ 0,5

$-1 < 0,1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ $\quad$ 0,25

3) a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{-2}{5} w_n$

$= -0,4\, w_n$ $\quad$ 0,75

b) $w_n > 0$ donc $-0,4\, w_n < 0$ $\quad$ 0,5

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

On admet que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante $\quad$ 0,25

et donc $v_n \geq v_0$ c'est à dire $v_n \geq 5$

(c) on veut montrer par récurrence que $u_n \geqslant 5$ pour $n \in \mathbb{N}$

<u>Initialisation</u> : pour $n=0$ $u_0 = 16$ $16 \geqslant 5$
vrai pour $n=0$

<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \geqslant 5$
on veut montrer que $u_{k+1} \geqslant 5$

$u_{k+1} = \frac{3u_k + 2v_k}{5}$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} v_k \geqslant 5 \\ u_k \geqslant 5 \end{matrix}\right\}$ donc $3u_k + 2v_k \geqslant 25$ et $u_{k+1} \geqslant 5$

vrai au rang $k+1$

<u>Conclusion</u> : on a montré par récurrence que $u_n \geqslant 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. $\quad$ 2/

(u_n) est décroissante, minorée par 5
Par théorème, elle converge vers l $\quad$ 0,5

on admet que (v_n) converge vers l'.

4) (a) $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l' \end{matrix}\right\}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l - l'$ par somme
or $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ $\quad$ 1/

la limite est unique donc $l - l' = 0 \iff l = l'$

(b) $c_n = 5u_n + 4v_n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) + 2(u_n + v_n)$
$= 5u_n + 4v_n = c_n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ $\quad$ 0,75

(c_n) est donc constante
or $c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 80 + 20 = 100$ $\quad$ 0,5
donc $c_n = 100$ pour $n \in \mathbb{N}$)

(c) Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 5u_n + 4v_n = 5l + 4l'$
or $l = l'$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 9l$ $\quad$ 1/
$c_n = 100 \iff 9l = 100 \iff l = \frac{100}{9} = l'$