Correction du sujet de Bac 2021 - Fonction ln /12

Partie I : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ } par quotient et somme $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ 1

2) Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ Par Somme $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1$ 1

3) $h'(x) = \frac{1/x \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 1

4) $x^2 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$

$1 - \ln x \geq 0$
$\iff 1 \geq \ln x$ $\quad x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\iff e \geq x$

1

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$h(e)$	$\searrow$	1

$h(e) = 1 + \frac{1}{e} \approx 1{,}37$ 1

5) • sur $[e;+\infty[$, h est strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1$ donc $h(x) > 0$

0,75

• sur $]0;e[$, h est continue (car dérivable)
h est strictement croissante
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $h(e) \approx 1{,}37$ (>0)

1,5

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0;e]$

Au total l'équation admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$ 0,25

$h(0{,}5) < 0$ et $h(0{,}6) > 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ 0,5

Partie II : $f(x) = x\ln x - x$ et $g(x) = \ln x$ sur $]0;+\infty[$
$a \in]0;+\infty[$

1) D_a tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a
a pour coefficient directeur $g'(a)$
or $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc $g'(a) = \frac{1}{a}$ $\underline{1}$

2) T_a tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a
a pour coefficient directeur $f'(a)$ 1,5
or $f'(x) = \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x$ donc $f'(a) = \ln a$

3) $T_a \perp D_a \iff f'(a) \times g'(a) = -1 \iff \frac{1}{a} \times \ln a = -1$
$\iff 1 + \frac{\ln a}{a} = 0 \iff h(a) = 0$
D'après la partie I, il existe un unique $a \in]0;+\infty[$
tel que $h(a) = 0$, c'est $a = \alpha$ 1,5
donc on a $T_\alpha \perp D_\alpha$

Remarque : $\vec{t_a}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ et $\vec{d_a}\begin{pmatrix} 1 \\ g'(a) \end{pmatrix}$ vecteurs directeurs respectifs de T_a et D_a

$T_a \perp D_a \iff \vec{t_a} \cdot \vec{d_a} = 0 \iff 1 + f'(a)g'(a) = 0 \iff f'(a)g'(a) = -1$