Bac - Espace - TSpé

1) $B(1;0;0)$
$D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$
$G(1;1;1)$
$H(0;1;1)$
$M\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$
$K\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

2) a) FEHG, CDHG et ADHE sont des carrés superposables donc leurs diagonales ont même longueur

$EG = GD = ED$

Le triangle EGD est équilatéral

b) $EG^2 = EH^2 + HG^2$ dans EHG rectangle isocèle en H d'après le théorème de Pythagore

$EG^2 = 1+1$

$EG^2 = 2$

$EG = \sqrt{2}$

donc $c = \sqrt{2}$ alors $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u.a.
aire du triangle EGD

3) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \iff \begin{cases} x_M - 1 = \frac{1}{3} \times (-1) \\ y_M = \frac{1}{3} \times 1 \\ z_M = \frac{1}{3} \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = 2/3 \\ y_M = 1/3 \\ z_M = 1/3 \end{cases}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) a) $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{m}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{m}\cdot\overrightarrow{EG} = -1+1 = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{ED} = 1-1 = 0 \end{array}\right\}$ $\vec{m}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (EGD)
donc $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan (EGD)

b) alors $(EGD) : -x+y+z+d = 0$
or $E \in (EGD) \iff 0+0+1+d = 0 \iff d = -1$

Donc une équation cartésienne de (EGD) est

$-x+y+z-1 = 0$

ⓒ $\mathcal{D} \perp (EGD)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $M \in \mathcal{D}$

donc $\begin{cases} x = 2/3 - t \\ y = 1/3 + t \\ z = 1/3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$

5) ⓐ K est le pied de la hauteur issue de M de la pyramide $GEDM$

donc $K \in (GED)$ et $(KM) \perp (GED)$

- Soit $K'\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

  $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0$ donc $K' \in (EGD)$

- $\overrightarrow{K'M}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{K'M} = \frac{-1}{3}\vec{n}$: $\overrightarrow{K'M}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

  donc $(K'M) \perp (EGD)$

donc $K = K'$

ⓑ $\begin{cases} KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} \\ b = \mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Alors $V = \frac{b \times h}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6}$ u.v.