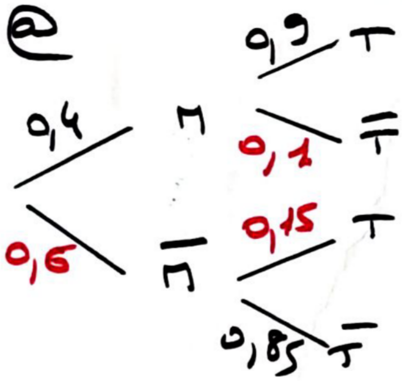
Sujet Bac - Métropole juin 2021

Ex 1 : 1) a



0,5

b $p(M\cap T) = p(M)\times p_M(T)$
$= 0,4\times 0,9$
$= 0,36$ 0,75

c M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers des chats.

D'après la formule des probabilités totales
$p(T) = p(M\cap T) + p(\bar{M}\cap T) = 0,36 + 0,6\times 0,15 = 0,45$ 1

d $p_T(M) = \dfrac{p(M\cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4}{5} = 0,8$

probabilité que le chat soit malade sachant que son test est positif. 0,75

2) a on reconnait un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = p(T) = 0,45$

En effet, l'échantillon est suffisamment grand pour que chaque chat soit indépendant l'un de l'autre.

1 X compte le nombre de chats testés positifs donc X suit la loi Binomiale $B(20 ; 0,45)$

b $p(X=5) = \binom{20}{5}\times 0,45^5 \times (1-0,45)^{15} \approx 0,036$ 1

c $p(X\leq 8) \approx 0,414$ d'après la calculatrice 0,75

d $E(X) = n\times p = 20\times 0,45 = 9$ En moyenne, on peut espérer avoir 9 chats testés positifs par lots de 20. 1

3) a ici, $X \sim B(n ; 0,45)$

$p(X\geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - (1-0,45)^n = 1 - 0,55^n = p_n$ 1

b L'algorithme calcule p_n (pour $n\in\mathbb{N}$) et s'arrête quand $p_n \geq 0,99$. Il affiche alors le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,99$ 0,75

c $1 - 0,55^n \geq 0,99$

$\iff 0,01 \geq 0,55^n$ $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff \ln(0,01) \geq n\ln(0,55)$

$\ln(0,55)<0$ $\iff \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \leq n$

$\approx 7,7$ 1,5

Le programme affiche $n = 8$

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+4} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

0,25

1) $\frac{4}{u_0} = 4$ $\quad \frac{4}{u_1} = 5 \ldots \quad \frac{4}{u_{12}} = 16$

il semble que $\frac{4}{u_n} = 4 + n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

1

2) on veut montrer que $u_n > 0$ pour ~~tout~~ $n \in \mathbb{N}$

initialisation : pour $n = 0$ $\quad u_0 = 1 \quad u_0 > 0$ vrai pour $n = 0$

hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $u_k > 0$

alors $4u_k > 0$ et $u_k + 4 > 0$

donc $u_{k+1} = \frac{4u_k}{u_k+4} > 0$ vrai au rang $k+1$

conclusion : on a montré par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ 2

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+4} - \frac{u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{-u_n^2}{u_n+4}$ $\quad u_n + 4 > 0$, $\; -u_n^2 < 0$

1,5 donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

4) (u_n) est décroissante et elle est minorée par 0

0,5 Par théorème (u_n) converge

5) $v_n = \frac{4}{u_n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4}{u_{n+1}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4(u_n+4)}{4u_n} - \frac{4}{u_n}$$

1,5

$$= \frac{u_n+4}{u_n} - \frac{4}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

1 $\quad v_0 = \frac{4}{u_0} = 4$ $\quad$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 de premier terme $v_0 = 4$

0,25 Alors $v_n = v_0 + n \times r = 4 + n$

6) $v_n = \frac{4}{u_n} \iff \frac{1}{v_n} = \frac{u_n}{4} \iff u_n = \frac{4}{v_n}$ alors $u_n = \frac{4}{4+n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (4+n) = +\infty$ Par quotient

1,5

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Ex 3 : Partie I :

1) d'après le graphique

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; +\infty[$ 1

2) d'après le graphique

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1

donc f est concave sur $]-\infty ; 0]$ puis convexe sur $[0 ; +\infty[$

Partie II : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} 2/e^x = 0$

Par Somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 1

Alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$, l'axe des abscisses 0,5

on admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 2)$
$= (-x-1)e^{-x}$ 0,75

b) $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

0,5
0,75

c) sur $[-2 ; -1]$ * f continue car dérivable
* f strictement croissante
* $f(-2) = 0$ (<2) et $f(-1) = e$ (>2)

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α sur $[-2 ; -1]$ 1,25

D'après la calculatrice

$f(-1,6) < 2$; $f(-1,59) > 2$ } donc $\alpha \approx -1,6$ 0,5

3) $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x})$

$= e^{-x}(-1+x+1) = xe^{-x}$ 0,75

$e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ du signe de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

donc f est concave sur $]-\infty; 0]$ 0,75

puis convexe sur $[0; +\infty[$

en $x = 0$, f'' s'annule en changeant de signe donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en $A(0; f(0))$ 0,75