Correction du devoir n° 9 - Tspé

Ex 1 : TR,S

$A(2;-1;0)$

$B(3;-1;2)$

$C(0;4;1)$

$S(0;1;4)$

$H(2;2;3)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -2+0+2=0$ 1,5
donc $\vec{AB}\perp\vec{AC}$
et ABC est un triangle rectangle en A

2) ⓐ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB} = 2+0-2=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC} = -4+5-1=0\end{cases}$ 1,5

$\vec{n}\perp\vec{AB}$ et $\vec{n}\perp\vec{AC}$
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires
donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

ⓑ on écrit donc $2x+y-z+d=0$ $(d\in\mathbb{R})$ 1
or $A\in(ABC) \Leftrightarrow 4-1+d=0 \Leftrightarrow d=-3$
donc une équation cartésienne de (ABC) est :

$2x+y-z-3=0$

ⓒ $2x_S+y_S-z_S-3 = 0+1-4-3=-6$ $\quad -6\neq 0$
donc $S\notin(ABC)$ 1
alors A, B, C et S ne sont pas coplanaires

3) ⓐ $(d)\perp(ABC)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d)
de plus $S\in(d)$ donc

$$\boxed{(d):\begin{cases}x=2t\\ y=1+t\\ z=4-t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})}$$

1

ⓑ $x_H=2t \Leftrightarrow 2=2t \Leftrightarrow t=1$
or $1+t=1+1=2=y_H$
et $4-t=4-1=3=z_H$
1,5 donc $H\in(d)$

de plus $2x_H+y_H-z_H-3 = 4+2-3-3=0$ donc $H\in(ABC)$

$H(2;2;3)$ est bien l'intersection de (d) et du plan (ABC)

4) $\left.\begin{array}{l}(SH)\perp(ABC)\\ \text{et } H\in(ABC)\end{array}\right\}$ donc H est le projeté orthogonal de S sur (ABC) et SH est la hauteur du tétraèdre SABC

$V = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABC}\times SH = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AC\times AB\times SH$ $\quad \begin{cases}AB^2=1+4=5\\ AC^2=4+25+1=30\end{cases}$

$\vec{SH}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $SH^2=4+1+1=6$

alors $V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{30}\times\sqrt{6} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 30 = 5$ u.v

2

5) a) $\vec{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ donc $SA^2 = 4+4+16 = 24$ et $SA = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6}$
$= 2\sqrt{6}$ u.l

1

b) $\vec{SA}\cdot\vec{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$ or $\vec{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $SB = \sqrt{17}$

alors $6+4+8 = 2\sqrt{6}\sqrt{17}\cos(\widehat{ASB})$ D'après la calculatrice

$\iff 18 = 2\sqrt{6}\sqrt{17}\cos(\widehat{ASB})$ $\widehat{ASB} \simeq 27{,}0°$ (par excès)

$\iff \cos(\widehat{ASB}) = \dfrac{9}{\sqrt{6}\sqrt{17}}$

2/

Ex2 : Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1) a) $I(1/2 ; 0 ; 1)$

0,5 $J(1 ; 1/2 ; 0)$

$P : x+3y-2z+2=0$

b) $\vec{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ /1,5

on a $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE}$

2

Les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ sont coplanaires

$(d_1) : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 4+t' \\ y = 1+t' \\ z = 8+2t' \end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$

2) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs respectifs de (d_1) et (d_2)

$1\times 1 = 1$ les coordonnées ne sont pas proportionnelles

$-2\times 1 \neq 1$ donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires

1,5

Alors (d_1) et (d_2) non parallèles

3) On essaie de résoudre $(t, t' \in\mathbb{R})$

$\begin{cases} 3+t = 4+t' & (L_1) \\ 8-2t = 1+t' & (L_2) \\ -2+3t = 8+2t' & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} -5+3t = 3 & (L_1)+(L_2) \\ t' = 7-2t \\ -2+3t = 8+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 8/3 \\ t' = 5/3 \\ -2+8 = 8+\frac{10}{3} \end{cases}$

non vérifié

Le système n'admet pas de solution
donc (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes

2

Alors (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

4) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan P et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_2)

1,5

$\vec{n}\cdot\vec{u_2} = 1+3-4 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u_2}$ alors $(d_2) \parallel (P)$

de plus $M(4 ; 1 ; 8) \in (d_2)$

et $x_M + 3y_M - 2z_M + 2 = 4+3-16+2 = -11$ $-11\neq 0$

donc $M \notin (P)$

(d_2) est strictement parallèle à (P).