Correction du dev 8 – Eq. diff – Tspé

Ex 1 : Partie I : $(E) : y' = -0,4y + 0,4$ /12

1) ⓐ On reconnait une équation différentielle du type $y' = ay + b$; $\frac{b}{a} = \frac{0,4}{-0,4} = -1$

1,5 donc $S = \{ Ke^{-0,4t} + 1 \, / \, K \in \mathbb{R} \}$

ⓑ g est solution de (E) donc $g(t) = Ke^{-0,4t} + 1$ sur $[0;+\infty[$

$g(0) = 10 \iff K + 1 = 10 \iff K = 9$

1,5 Donc $g(t) = 9e^{-0,4t} + 1$

Partie II : $p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}$ sur $[0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,4t = -\infty$; $X = -0,4t$; $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ $\Bigg\}$ Par composition, produit et somme $\lim\limits_{t\to+\infty} (1 + 9e^{-0,4t}) = 1$

1,5 Par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$

2) $p = \frac{1}{v}$ donc $p' = \frac{-v'}{v^2}$

1,5 $p'(t) = \frac{-9 \times (-0,4) e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2} = \frac{3,6\, e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$

3) ⓐ • sur $[0;+\infty[$ p continue car dérivable

• p strictement croissante car $p'(t) > 0$

2 • $p(0) = \frac{1}{10} = 0,1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$

ⓑ d'après la calculatrice

0,75 $p(5,49) < \frac{1}{2}$ et $p(5,50) > \frac{1}{2}$ donc $5,49 < \alpha < 5,50$

et $\alpha \approx 5,5$ par excès

Partie III : $p(t)$ représente la proportion des écoles ayant accès à internet à t années. 0,25

$p(0) = \frac{1}{10}$ En 2020 la proportion était de 10% 1

$p(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $p(t) > \frac{1}{2}$ pour $t > \alpha$, la proportion dépasse les 50% au bout de 5 années et demi soit en 2025 ou en 2026 1

$\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$ Au fil des années la proportion devrait tendre vers 100%

1

Ex 2 : $(E) : y' = y + 2xe^x$

/8

1) $u(x) = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$

1,5 $u'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = u(x) + 2xe^x$

donc u est une solution particulière de (E)

2) $g(x) = f(x) - u(x)$ sur $\mathbb{R}$

ⓐ f solution de $(E) \Rightarrow f' = f + 2xe^x$

or u solution de $(E) \Rightarrow u' = u + 2xe^x$ sur $\mathbb{R}$

Par différence, on a $f' - u' = f - u$

2 soit $(f-u)' = (f-u)$ ou encore $g' = g$

Donc f solution de $(E) \Rightarrow g$ solution de $(E_0) : y' = y$

ⓑ (E_0) est du type $y' = ay$ donc $g(x) = ke^x$ $(k \in \mathbb{R})$

2 alors $f(x) = g(x) + u(x) = ke^x + x^2 e^x = (k + x^2) e^x$

$S = \{(k + x^2) e^x \,/\, k \in \mathbb{R}\}$

3) on admet que $u''(x) = (x^2 + 4x + 2) e^x$

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $u''(x)$ est du signe de $(x^2 + 4x + 2)$

$\Delta = 16 - 8 = 8 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

2,5 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$u''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a = 1$ du signe de a à l'extérieur des racines

$u''(x) \leq 0$ sur $[-2-\sqrt{2} ; -2+\sqrt{2}]$

donc u est concave sur $[-2-\sqrt{2} ; -2+\sqrt{2}]$