Correction du dev 7 - Tspé

Ex 1 : $f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$; $a,b\in\mathbb{R}$ 11,5

I) 1) $f(1)=2$ car $B(1;2)\in\mathcal{C}_f$ 0,5

$f'(1)=-1$ coefficient directeur de T_B 1

2) f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient

$$f'(x)=\frac{b\times\frac{1}{x}\times x-(a+b\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$$ 1

3) $f(1)=2 \iff \dfrac{a+b\ln 1}{1}=2 \iff a=2$

$f'(1)=-1 \iff \dfrac{b-a-b\ln 1}{1}=-1 \iff b-a=-1 \iff b=a-1$ 2/

donc $a=2$ et $b=1$ $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$ et $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$

II) 1) $f\left(\frac{1}{e}\right)=\dfrac{2+\ln(1/e)}{1/e}=\dfrac{2-\ln e}{1/e}=\dfrac{2-1}{1/e}=\dfrac{1}{1/e}=e=y_A$ 1

donc $A\in\mathcal{C}_f$

$f(x)=0 \iff 2+\ln x=0$ $\ln x=-2 \iff x=e^{-2}$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $D(e^{-2};0)$ 1

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(2+\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=0^+$; par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ 0,5

par somme

$f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées 1

par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$ du signe de $(-1-\ln x)$ car $x^2>0$ 0,25

$-1-\ln x\geq 0 \iff -1\geq \ln x \iff e^{-1}\geq x$ car $x\mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$ 1

donc

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

0,75

4) on admet que $f''(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

f convexe $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \underset{x^3>0}{\Leftrightarrow} 1+2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \dfrac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-1/2}$

f convexe sur $[e^{-1/2};+\infty[$ 1,5

<u>Ex2</u> : $f(x) = \ln(x^2+x+5/2)$ sur $\mathbb{R}$

19

1) $x^2+x+5/2 = x(x+1)+5/2$

par produit et somme

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+5/2) = +\infty$

et

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+5/2) = +\infty$

on pose $X = x^2+x+5/2$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

2

Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+5/2}$ $\quad x^2+x+5/2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ du signe de $a=1$

$\Delta < 0$ 0,75

1

3) donc $f'(x)$ est du signe de $2x+1$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(9/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0,8$

1

4) a) sur $[\frac{-1}{2};+\infty[$, f continue (car dérivable)

f ~~strictement~~ croissante

$f(-1/2) \approx 0,8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-1/2;+\infty[$

1,5

b) d'après la calculatrice

0,75

$\left.\begin{array}{l} f(1,76) < 2 \\ f(1,77) > 2 \end{array}\right\}$ donc $1,76 < \alpha < 1,77$; $\alpha \approx 1,8$ par excès

5) $f''(x) = \dfrac{-2x^2-2x-4}{(x^2+x+5/2)^2}$ on cherche quand $f''(x) = 0$ en changeant de signe

2 du signe de $-2x^2-2x-4$

or $-2x^2-2x-4 = -2(x^2+x+2)$

$= -2(x-1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de a à l'extérieur

$\mathcal{C}_f$ admet 2 points d'inflexion d'abscisses -2 et 1