Correction du devoir n°6 – Tspé

Ex 1 : $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$ sur $[-2;2]$

1) $f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+5)e^x$ $\quad f=uv \quad f'=u'v+uv'$

$=(x^2-2x+1)e^x$

$=(x-1)^2e^x$

2) $\left.\begin{array}{l}(x-1)^2\geqslant 0\\ e^x>0\end{array}\right\}$ donc $f'(x)\geqslant 0$

x	-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$17e^{-2}$	$\nearrow$	$2e$	$\nearrow$	e^2

3) $f''(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+1)e^x$

$=(x^2-1)e^x$

$=(x+1)(x-1)e^x$

4) $e^x>0$ donc $f''(x)$ est du signe de x^2-1

x	-2		-1		1		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines

Sur $[-2;-1]$ et sur $[1;2]$, $f''(x)\geqslant 0$ donc f est convexe

Sur $[-1;1]$, $f''(x)\leqslant 0$ donc f est concave

5) $f''(-1)=f''(1)=0$ avec changement de signe

donc $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion

$A\left(-1;\frac{10}{e}\right)$ et $B(1;2e)$ $\qquad \begin{cases} f(-1)=10e^{-1}\\ f(1)=2e\end{cases}$

Ex 2 : $f(x)=x+1+xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

1) a) $f'(x)=1+1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=1+(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-1\times e^{-x}+(1-x)\times(-e^{-x})=(-1-1+x)e^{-x}$

$=(x-2)e^{-x}$

b) $e^{-x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

f' est donc strictement décroissante sur $]-\infty;2]$ puis croissante sur $[2;+\infty[$

c) $f'(2)=1-e^{-2}\simeq 0{,}86$ est le minimum pour $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

donc $f'(x)>0$

2) $f(x) = x + 1 + x e^{-x} = x + 1 + \frac{x}{e^x}$ $\qquad \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$

• Par croissances comparées et quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} x/e^x = 0$

Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = 0^+$

Par quotient et somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

On a donc

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) sur $\mathbb{R}$, • f est continue (car dérivable)
• f strictement croissante
• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$

D'après la calculatrice, $f(0{,}65) < 2$ et $f(0{,}66) > 2$
donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$

4) a) T : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$
donc $y = 2x + 1$

b) A la question 1)b, on a vu que $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 2]$
donc f est concave et C_f est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier T donc : $f(x) \leq 2x + 1$ pour $x \leq 2$

5) a) Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 2 \iff x + 1 + x e^{-x} = 2 \iff x(1 + e^{-x}) = 1$
$\iff x(e^x + 1) = e^x \iff x = \frac{e^x}{e^x + 1}$

b) $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ $\qquad h'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$h'(x) > 0$ donc

x	0		α		1
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\nearrow$	$\frac{e}{e+1}$

$h(\alpha) = \alpha$

c) α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$
$\alpha \in [0 ; 1]$ soit α est la solution de $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$
ou encore de $h(x) = x$
Donc $h(\alpha) = \alpha$