

Correction du devoir n°6 - Tsfé

Ex 1: $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ sur $[-2; 2]$

1) $f'(x) = (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x$ $f = uv$ $f' = u'v + uv'$
 $= (x^2 - 2x + 1)e^x$
 $= (x - 1)^2 e^x$

2) $(x - 1)^2 \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$
 $e^x > 0$

x	-2	1	2
$f'(x)$		+ 0 +	
$f(x)$	$7e^{-2}$	$2e$	e^2

3) $f''(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 1)e^x$
 $= (x^2 - 1)e^x$
 $= (x + 1)(x - 1)e^x$

4) $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$

x	-2	-1	1	2
$f''(x)$	+ 0 -	0 +		

du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines

Sur $[-2; -1]$ et sur $[1; 2]$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe
 Sur $[-1; 1]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave

5) $f''(-1) = f''(1) = 0$ avec changement de signe donc \mathcal{C} admet deux points d'inflexion

$A(-1; \frac{10}{e})$ et $B(1; 2e)$

$$\begin{cases} f(-1) = 10e^{-1} \\ f(1) = 2e \end{cases}$$

Ex 2: $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$ sur \mathbb{R}

1) (a) $f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = 1 + (1 - x)e^{-x}$
 $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) = (-1 - 1 + x)e^{-x}$
 $= (x - 2)e^{-x}$

(b) $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

f' est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$
 puis croissante sur $[2; +\infty[$

(c) $f'(2) = 1 - e^{-2} \approx 0,86$ est le minimum pour $f'(x)$ sur \mathbb{R}
 donc $f'(x) > 0$

$$2) f(x) = x + 1 + x e^{-x} = x + 1 + \frac{x}{e^x} \quad \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^{x/2}}$$

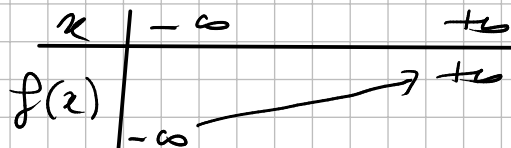
• Par comparaisons comparées
et quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Par Somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Par Quotient
et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

On a donc



3) sur \mathbb{R} , f est continue (car dérivable)
 • f strictement croissante
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α sur \mathbb{R}

D'après la calculatrice, $f(0,65) < 2$ et $f(0,66) > 2$
donc $0,65 < \alpha < 0,66$

4) (a) $T: y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$
donc $y = 2x + 1$

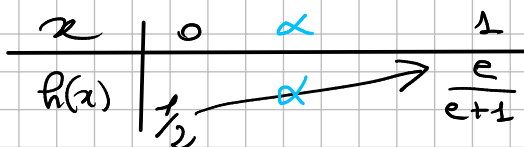
(b) A la question 1) b), on a vu que $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty; 2]$
donc f est concave, et T est au-dessus de toutes ses
tangentes, en particulier T donc: $f(x) \leq 2x + 1$ pour $x \leq 2$

5) sur \mathbb{R} , $f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 + x e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x(1 + e^{-x}) = 1$

(a) $\Leftrightarrow x(e^x + 1) = e^x \Leftrightarrow x = \frac{e^x}{e^x + 1}$

(b) $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ $h'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^2}{(e^2 + 1)^2}$

$h'(x) > 0$ donc



$$h(\alpha) = \alpha$$

(c) α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$
soit α est la solution de $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$
ou encore de $h(x) = x$
Donc $h(\alpha) = \alpha$